Решаване на “нерешими” задачи с помощта на подходящ софтуер

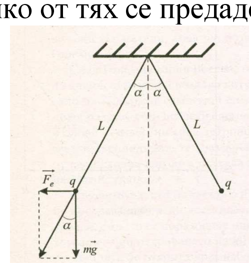
Усвояването на информационни технологии в училище разширява съществено възможностите за решаване на такива физични задачи, които до сега изглеждаха “нерешими” заради дефицита на математични средства, с които разполагаме. Различни са посоките, в които може да се търси пробив в това отношение. Тук се разглежда една възможност, приложима в случаите, когато търсената величина зависи от параметър и представлява решение на някакво “нерешимо” уравнение (например алгебрично уравнение от степен, по-висока от четири). Много често въпросното уравнение може да се реши не спрямо неизвестната величина, а спрямо параметъра. В този случай е възможно да се построи графика на обратната на търсената функция, т. е. графика, показваща стойностите на параметъра, които съответстват на определени стойности на неизвестната. Тогава по тази графика може да се намерят и стойността (или стойностите) на търсената величина в зависимост от стойността на параметъра – задачата става решима. Разбира се, при това ние излизаме извън тясното схващане, че решението на една физична задача може да бъде само някаква формула, някакъв аналитичен израз. Това разширено разбиране на понятието “решение” е и по-близко до практиката, в която решението на даден проблем може да се получи и във вид на графика, на таблица със стойности, на номограма и др. п.

От казаното по-горе се вижда, че ключовият момент в подобно решение е построяването на въпросната графика. То може да се осъществи по два начина. Първо, с помощта на калкулатор (понякога е достатъчен обикновен, а почти винаги – програмируем калкулатор) може да се пресметнат стойностите на обратната функция за определен набор стойности на неизвестната и по тях (на ръка) да се изчертае графиката. Много по-впечатляващо и ефективно е обаче, ако графиката се построи с помощта на подходящ програмен продукт от типа на Origin, Stanford Graphics и др. п.

По-долу чрез един пример се илюстрира предлагания тип решения на някои “нерешими” задачи.

Изучаването на електростатичните явления често започва с демонстрации на взаимодействия между електростатични махала. Чрез тях на качествено равнище може да се покаже зависимостта на електричните сили от зарядите на махалата и от разстоянието между тях. Въпреки това, дори след изучаване на закона на Кулон, в нито един сборник няма да намерите задача, в която да се разглежда най-простата ситуация от този вид: да се търси отклонението на махалата при зададени заряди и начално разстояние между тях. Причината за този факт ще открием, като анализираме следната задача.

Задача. Две еднакви малки бъзови топчета с маса m са окачени в една точка на леки нишки с дължина L. На какъв ъгъл спрямо вертикалата ще се отклонят топчетата, ако на всяко от тях се предаде заряд q?



Фиг. 1.

Решение. На фиг. 1 са изобразени топчетата след отклонението. Търсеният ъгъл е означен с α, така че разстоянието между тях е $2L\sin\alpha$, а големината на кулоновата сила на отблъскване е:

(1) $$F_e = k\frac{q^2}{(2L\sin\alpha)^2} \quad \left(k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right).$$

От фигурата се вижда, че:

(2) $$tg\alpha = \frac{F_e}{mg},$$

където g е земното ускорение. Като заместим израза за F_e от (1) в (2), отчетем, че $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$, въведем чрез равенството:

(3) $$\rho = \frac{kq^2}{4mgL^2},$$

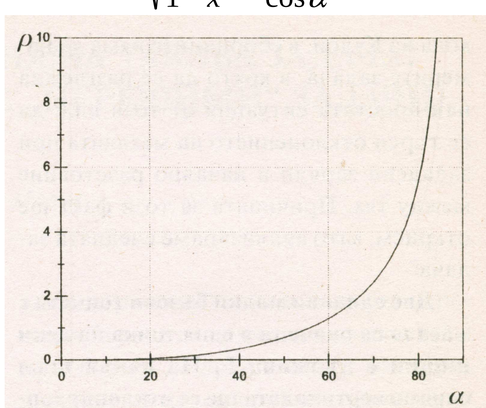
безразмерния параметър ρ, както и новата неизвестна величина $x = \sin^2\alpha$, след повдигане в квадрат и преобразуване, за последната получаваме уравнението:

(4) $$x^3 + \rho^2 x - \rho^2 = 0.$$

Сега вече е ясно защо тази задача не се среща в сборниците – трудността при решаването ѝ е чисто математическа. Не, че в справочниците по математика липсват формули за корените на кубични уравнения – не, но просто с това се отвлича вниманието от физиката, без да се получи нещо особено полезно от физична гледна точка. Интересното тук е, че уравнение (4) е частен случай на кубично уравнение, към който е приложима директно формулата на Кардано[1], но тази възможност няма да използваме, защото целта е да илюстрираме изложения в началото графичен метод.

И така, вместо да търсим корените на кубичното уравнение (4), ние го решаваме спрямо параметъра ρ:

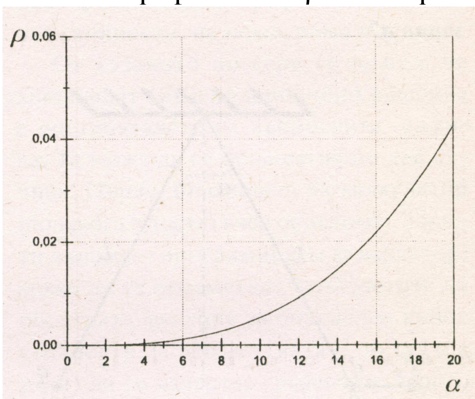
(5) $$\rho = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}} = \frac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha}.$$



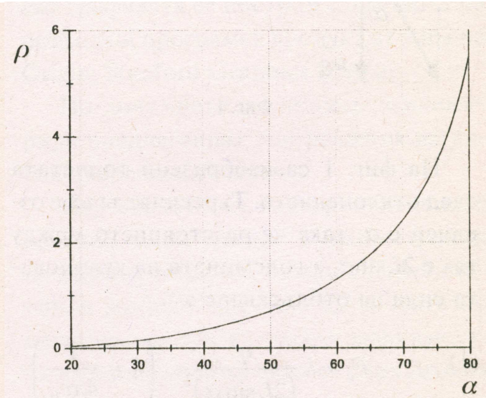
Фиг. 2.

[1] Вж. напр. учебника Висша алгебра на Никола Обрешков, в който се обръща внимание на факта, че формулата на Кардано често дава корените на кубичното уравнение в неудобна форма. Като пример в това отношение е посочено уравнението $x^3 + 6x - 14 = 0$, един от корените на което очевидно е $x = 2$. Трудно е обаче да се прозре, че изразът $x = \sqrt[3]{7+\sqrt{57}} + \sqrt[3]{7-\sqrt{57}}$, получен с помощта на формулата на Кардано, е точно 2.

Графиката на функцията (5) за стойности на α в интервала $0° \leq \alpha \leq 90°$ е показана на фиг. 2. По графиката би трябвало обратно, за всяка стойност на параметъра ρ да можем да намерим и търсения ъгъл. Видът на кривата показва, обаче, че ако действително желаем от нея да намерим съответните ъгли, по-удачно е да разделим целия интервал на няколко части – на фиг. 3 и фиг. 4 са показани графиките на ρ за интервалите съответно от 0° до 20° и от 20° до 80°.



Фиг. 3.



фиг. 4.

Нека приложим получените графики за частния случай на топчета с маса $m = 1$ g $= 10^{-3}$ kg, окачени на нишки с дължина $L = 40$ cm $= 4.10^{-1}$ m, всяко от които има заряд $q = 10^{-7}$ C. За тези стойности[2] от формула (3) получаваме, че параметърът ρ е равен на:

$$\rho = \frac{kq^2}{4mgL^2} = \frac{(9.10^9).(10^{-7})^2}{4.(10^{-3})(9{,}81)(0{,}4)^2} = 0{,}0143\,.$$

От фиг. 3 се вижда, че на тази стойност отговаря ъгъл на отклонение около 14° – решението е намерено.

Прилагането на подобни похвати при решаване на задачи дава възможност да се развият редица полезни умения за боравене с графики, за премащабирането им при нужда и т.н.

[2] При заместване на числените стойности на величините нарочно не са изписани единиците им. Смятаме, че това е необходимо само в процеса на обучение. В други случаи, като се отчита, че SI е **кохерентна** система, това е излишно – самата система гарантира, че ако стойностите на всички величини в една формула са в SI, то и стойността на пресмятаната по формулата величина се получава в SI.