Задача за бънджи скок - 1

Една добра учебна задача по физика като правило разглежда достатъчно проста ситуация, дискутирането на която има за цел да разкрие съществени черти на явленията и на наблюдаваните при тях закономерности. Съществуват обаче наистина прости ситуации, които не се срещат в нито един сборник. Обикновено причина за това са математическите трудности, които трябва да се преодоляват при разглеждането им, липсата на решение и др.п. Въпреки това, нерядко обсъждането на задачи, свързани с подобни ситуации, е поучително от гледна точка на постигане на гореспоменатата цел. А ако решението се получи с помощта на подходящ математически софтуер, с това бихме постигнали и една нова цел, каквато до сега[1] не е поставяна пред решаването на физични задачи: ***да приобщим учениците към използване на компютрите за една от основните им функции, за които всъщност са конструирани***. Такава цел би могло да се постави поне пред тези ученици, които изучават по-задълбочено информатика. По-долу привеждаме пример за подобна задача.

Физиката на бънджи скоковете е област с богати възможности за съставяне на интересни и поучителни задачи от механиката. В сборниците със задачи по физика обаче няма да намерите следната задача.

Задача. Човек с маса m стои върху мост на височина H над земята. Човекът е привързан с еластично въже, другият край на което е завързан за перилата на моста. Възможно ли е дължината L и коефициентът на еластичност k на въжето да се подберат така, че скачайки, човекът да се приземи меко върху земята и да остане върху нея? (Масата на въжето се пренебрегва.)

Решение. Ако под “меко приземяване” се разбира достигане до земята със скорост нула, то отговорът на поставения въпрос е НЕ – не е възможно човекът да достигне земята със скорост нула **и да остане върху нея, привързан към въжето**.

1. *Най-кратката* обосновка в полза на посочения отговор е следната: фактът, че в нито един сборник не са пресметнати търсените дължина и коефициент на еластичност показва, че задачата няма решение. За съжаление, този аргумент не е физичен.

2. *Качествената* обосновка също не е сложна: след като въжето започне да се разтяга, движението на човека е хармонично трептение. Ако достигне земята със скорост нула, това означава, че в този момент отклонението му от равновесното положение е максимално, а когато отклонението е максимално, максимално е и ускорението от силата на еластичност, насочено към равновесното положение. Следователно щом докосне земята “меко”, човекът ще започне да се издига нагоре, т.е няма *да остане* на земята.

3. *Количествена* обосновка (за тези, които предпочитат уравненията пред разсъжденията): тъй като системата е консервативна, а кинетичната ѝ енергия и в началото, и в края е нула, необходимо е потенциалната енергия на началното и на крайното състояние да е една и съща. Това означава да бъде изпълнено равенството:

$$mgH = \frac{k}{2}(H-L)^2 . \tag{1}$$

За да остане човекът върху земята е необходимо големината на силата на еластичност (която дърпа нагоре) да е равна най-много на силата на тежестта, т.е.

$$mg = k(H-L). \tag{2}$$

Като разделим (1) на (2), се убеждаваме, че независимо от стойността на k, двете уравнения нямат удовлетворително от физична гледна точка решение (получава се $L = -H$).

---

[1] Публикацията в сп. *Физика* е от 2003 г.

По нататък. И така, не е възможно да се удовлетворят едновременно двете изисквания: скоростта на приземяване да бъде нула (равенство (1)) и привързаният с въжето човек да остане на земята (равенство (2)). Нека сега се откажем от “мекото приземяване” и потърсим минималната скорост, с която човекът ще достигне земята, без въжето да го издърпа обратно нагоре (т.е. искаме да е изпълнени равенство (2)).

В този случай вместо (1) трябва да бъде изпълнено равенството

(3) $$mgH = \frac{k}{2}(H-L)^2 + \frac{mv^2}{2},$$

където v е търсената скорост на приземяване.

За да бъдат по-нататъшните разсъждения физически по-ясни, трябва да отчетем, че според закона на Хук големината на силата на еластичност е свързана с удължението $(H - L)$ на въжето чрез формулата

(4) $$F = ES\frac{H-L}{L},$$

където S е площта на напречното сечение на въжето, а E – модулът на Юнг на материала, от който е направено. От (4) следва, че коефициентът на еластичност на въжето зависи от неговата дължина L в не разтегнато състояние и е равен на:

(5) $$k = \frac{ES}{L}.$$

Като заместим този израз в (2) и (3) и въведем безразмерния параметър

(6) $$\alpha = \frac{mg}{ES},$$

двете равенства придобиват вид съответно:

(7) $$\frac{H-L}{L} = \alpha$$

(8) $$\alpha H = \frac{(H-L)^2}{2L} + \alpha\frac{v^2}{2g}.$$

От (7) определяме дължината на въжето:

(9) $$L = \frac{H}{1+\alpha}.$$

Заместваме този израз в (8) и за скоростта на приземяване намираме:

(10) $$v = v_0\sqrt{1 - \frac{\alpha}{2(1+\alpha)}},$$

където с $v_0 = \sqrt{2gH}$ е означена скоростта, която придобива едно тяло при свободно падане от височина H.

Лесно се проверява, че $v(\alpha)$ е намаляваща функция на α (т.е. $\frac{dv}{d\alpha} < 0$). Максимална скорост на приземяване $v = v_0$ се получава при $\alpha = 0$. Според (6) това е случаят на много лек човек или много дебело въже с голям модул на Юнг. В този случай за дължината на въжето от (9) получаваме $L = H$, което означава, че въжето изобщо няма да започне да се разтяга и движението на човека през цлото време всъщност ще представлява свободно падане.

Минималната скорост на приземяване се получава при $\alpha \to \infty$, т.е. в случая на човек с голяма маса или много тънко въже с малък модул на Юнг. В този случай $L \to 0$, а $v \to \frac{v_0}{\sqrt{2}}$, т.е. скоростта на приземяване е само $\sqrt{2}$ пъти по-малка, отколкото при свободно падане. Като оставим настрана факта, че от практическа гледна точка случаят $L \to 0$ е неприемлив, виждаме, че както и да подобряваме параметрите, скоростта на приземяване е в границите:

(11) $$\frac{v_0}{\sqrt{2}} < v < v_0,$$

т.е. във всички случай, щом искаме веднъж стъпили на земята, да останем на нея, както и да подбираме въжето, приземяването ще е достатъчно "твърдо".

Нека сега постъпим обратно: да се откажем от изискването в момента на приземяване силата на тежестта да е поне равна на силата на еластичност (т.е. да се откажем от равенство (2)) – в края на краищата може да се измисли механизъм за достатъчно бързо освобождаване на човека от въжето, така че да не го издърпа обратно нагоре. Това свежда нещата до следната любопитна задача, която може да се реши с ученици, които познават закона на Хук:

Задача. Каква е минималната дължина L на въже с напречно сечение S и модул на Юнг E, с което, скачайки от височина H, човек с маса m да се приземи меко?

Един качествен анализ показва, че такава задача сигурно има решение. Наистина, ясно е, че ако съществува такава дължина, тя трябва да бъде в интервала $0 < L < H$. От физични съображения е ясно също така, че ако L е близо до долната граница (т.е. при късо въже), скоростта на човека ще стане нула в точка, която е далеч от земята. Колкото по-дълго е въжето, толкова по-близо до земята ще бъде тази точка и следователно при определена стойност на L от посочения интервал точката на нулевата скорост ще се окаже на земната повърхност.

За количествено решаване на задачата е удобно да я преформулираме на езика, използван при енергетичния подход към задачите от механиката: при каква дължина на въжето гравитационната потенциална енергия на човека върху моста е равна на потенциалната енергия на разтегнатото въже, когато човекът е стъпил на земята? С други думи при каква стойност на L е изпълнено равенство (1)? Като заместим в (1) k с израза (5), въведем означението (6) и решим полученото квадратно уравнение за L, получаваме:

(12) $$L = H\left(1 + \alpha - \sqrt{\alpha(\alpha + 2)}\right).$$

(Другото решение на квадратното уравнение е извън интервала $0 < L < H$.)

От формула (12) следва, че при $\alpha \to 0$, дължината L на въжето клони към H, т.е. почти през цялото време движението е свободно падане. Наистина при много лек човек и дебело въже с голям модул на Юнг дори и незначително удължение е в състояние да анулира придобитата при свободното падане скорост. Това приземяване обаче едва ли може да се нарече "меко": въпреки че стъпва на земята със скорост нула, придобитата при свободното падане скорост става нула за много кратък интервал време, т.е. ускорението нагоре клони към безкрайност, което е еквивалентно на удар.

За другия граничен случай – $\alpha \to \infty$ (тежък човек, тънко въже с малък модул на Юнг) от (12) следва, че дължината на въжето клони към нула ($L \to 0$). В този случай участък на свободно падане липсва – още в началния момент "въжето" започва да тегли човека нагоре.

Лесно се проверява, че като функция на α дължината на въжето няма екстремуми. Може би е любопитно да се направят някои числени оценки на получения резултат. Преди всичко следва да се отбележи, че според закона на Хук (4) произведението ES има смисъл на сила, която приложена на въже с дължина 1 m, го удължава с 1 m. Не разполагам с данни за свойствата на въжетата, използвани при бънджи скоковете, но предполагам, че ако човек с нормална маса увисне на такова въже с дължина 1 m, ще го удължи с не-повече от 10 cm, т.е. 10 пъти по-малко, отколкото силата *ES*. Това означава, че стойността на параметъра α е:

$$\alpha = \frac{mg}{ES} \leq 0{,}1.$$

При α = 0,1 от (12) за дължината на въжето получаваме $L \approx 0{,}64H$. Това означава, че за меко приземяване след скок от най-високия мост на магистрала *Хемус* след Витиня (H = 120 m) е необходимо въже с дължина около 77 m. Ако действителната стойност на α е по-малка от приетата, дължината на въжето трябва да бъде по-голяма и обратно – при по-голямо α въжето трябва да бъде по-късо.

Разбира се, всички направени дотук разглеждания са при предположение, че не излизаме извън границите на приложимост на закона на Хук.

Вижда се, че дори анализът на една сравнително несложна ситуация като разгледаната, дава големи възможности за разнообразяване: на учениците може да се поставят допълнително задачи да намерят (от справочници, или от хора, които са правили бънджи скокове) данни, които да помогнат за пресмятане на реалните стойности на *ES*, данни за масата на единица дължина от въжето, след което да преценят доколко правомерно е пренебрегването на общото маса на въжето спрямо масата на човека и т.н., и т.н.