Вариации на тема гравитация

Предварителни бележки. Известен брой качествени задачи с количествен елемент, отнасящи се до движение на тяло в гравитационно поле с централна симетрия, могат да бъдат решавани със сравнително скромен математичен инструментариум и само със законите на Кеплер или еквивалентния им закон на Нютон за гравитацията (да не забравяме, че както от законите на Кеплер следва законът на Нютон, така и от закона на Нютон следват законите на Кеплер). Като правило обаче използването на законите на Кеплер е свързано с по-сложни мисловни конструкции, докато законът за гравитацията води по-директно до целта, особено ако се използва едно основно негово следствие – формулата за гравитационен потенциал на точкова маса.

Всички задачи, които ще разгледаме тук, се отнасят до движение на тяло в земното гравитационно поле *при пренебрегване на съпротивлението на въздуха* и *при предположение, че масата на Земята е много по-голяма от масата на движещото се около нея тяло*. (Последното условие дава възможност да смятаме Земята неподвижна, т.е. да не отчитаме кинетичната ѝ енергия.)

За разлика от решаваните в училище задачи, в които се разглеждат движения близо до земната повърхност (т.е., когато земното гравитационно поле може да се смята хомогенно), тук ще разглеждаме случаи, в които или разстоянието на движещото се тяло до повърхността на Земята не е пренебрежимо малко спрямо радиуса ѝ, или скоростта на движението му е от порядъка на първата космическа скорост, или и двете.

Какви факти, засягащи гравитацията ще използваме?

Както обикновено, предполагаме сферично-симетрично разпределение на масите във вътрешността на Земята, така че полето около нея е същото, каквото би било, ако цялата ѝ маса е съсредоточена в нейния център. При това положение, ако с G и M означим съответно гравитационната константа и масата на Земята, на тяло с маса m, намиращо се на разстояние r от центъра ѝ, действа гравитационна сила:

$$F = G\frac{mM}{r^2}, \quad r \geq R, \tag{1}$$

където R е земният радиус. При това положение гравитационната потенциална енергия на взаимодействие между двете тела се описва с формулата:

$$E_{\text{п}} = -G\frac{mM}{r}. \tag{2}$$

(Тази формула се различава от формулата за електричната потенциална енергия на точкови заряди само по знака минус. Разликата е следствие от факта, че докато два едноименни заряда се отблъскват, две маси, които са положителни величини, гравитационно се привличат.)

Пълната механична енергия $E_{\text{м}}$ на движещото се тяло е:

$$E_{\text{м}} = E_{\text{к}} + E_{\text{п}} = \frac{mv^2}{2} - G\frac{mM}{r}. \tag{3}$$

От механиката е известно, че ако механичната енергия на система, в които действат намаляващи с увеличаване на разстоянието сили на привличане (какъвто е нашият случай) е отрицателна, то при движението си частите на системата остават на крайни разстояния – т.е. такава система е *свързана*. Ако енергията на системата е положителна величина, тогава частите ѝ може да се раздалечават и на безкрайно големи разстояния.

Според формула (3), в зависимост от разстоянието на тялото до центъра на Земята и от скоростта му, величината $E_{\text{м}}$ може да бъде положителна, отрицателна или нула. При $E_{\text{м}} > 0$ тялото се движи по клонка от хипербола, при $E_{\text{м}} = 0$ – по парабола, а при $E_{\text{м}} < 0$ – системата е свързана и движението е по елипса. Ако смятаме началното разтояние r фиксирано, знакът на $E_м$ се определя от началната скорост. При малки скорости (какво означава това ще уточним впоследствие) $E_м < 0$ и движението е по елипса.

При решаване на някои задачи ще използваме израза за скоростта v на тяло, което обикаля Земята по кръгова орбита с радиус r. Този израз се получава чрез приравняване на гравитационната сила($F = G\frac{mM}{r^2}$) и центростремителната сила ($F = \frac{mv^2}{r}$), необходима за извършване на подобно движение:

$$v^2 = G\frac{M}{r}. \tag{4}$$

При $r = R$ получаваме познатия израз за големината на първа космическа скорост:

$$v_0^2 = G\frac{M}{R}. \tag{5}$$

Още Нютон е знаел, че ако от висок планински връх изстреляме в хоризонтална посока снаряд със скорост v_0, той няма да падне на земната повърхност и ще обикаля Земята по кръгова орбита. По-долу ще разгледаме движения, които се различават от това на Нютоновия снаряд или по големината на началната скорост, или по посоката ѝ.

Кои свойства на елипсите ще използваме?

Тъй като според първия закон на Кеплер движенията на планетите стават по елипси, в единия фокус на които се намира Слънцето, а при описаните по-горе ограничения движенията в околоземното пространство се подчиняват на този закон, полезно ще бъде да припомним някои от свойствата на тези криви.

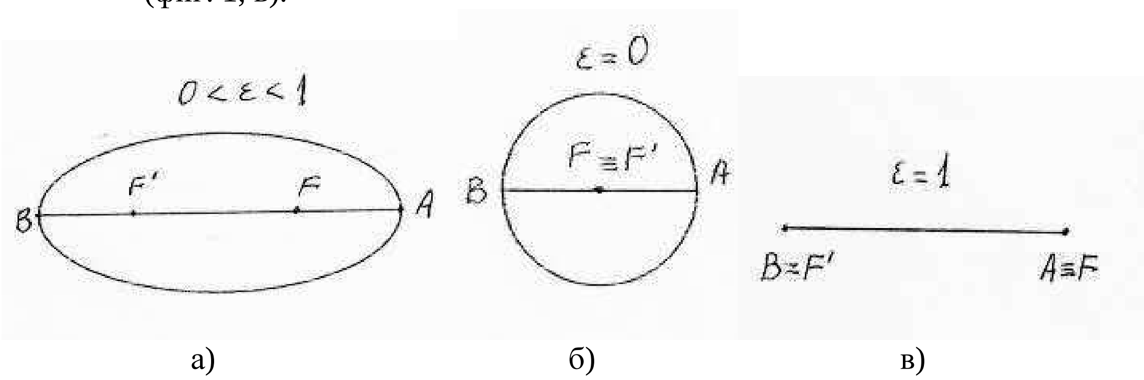
Според едно от определенията за елипса тя представлява геометрично място на точки, за които сумата от разстоянията до две фиксирани точки е една и съща. Тези фиксирани точки се наричат фокуси и по-нататък ще ги означаваме с F и F' (фиг. 1, а). Отсечката, съединяваща фокусите определя направлението на голямата ос AB на елипсата. Краищата т. A и т. B на голямата ос представляват върхове на елипсата. Само в тези две точки тангентата към елипсата е перпендикулярна на отсечката, която ги свързва с някой от фокусите.

Отношението от разстоянието между фокусите и дължината на голямата ос, т.е.:

$$0 \le \varepsilon = \frac{|FF'|}{|AB|} \le 1$$

се нарича ексцентрицитет на елипсата и определя нейната сплеснатост, т.е. доколко кривата се отличава от окръжност. По-долу ще срещаме два важни гранични случая:

- При $\varepsilon = 0$ двата фокуса съвпадат ($F \equiv F'$ и $|FF'| = 0$). В този случай кривата не е сплесната – елипсата представлява окръжност (фиг. 1, б).
- При $\varepsilon = 1$ фокусите съвпадат с върховете на елипсата ($A \equiv F$, $B \equiv F'$ $|FF'| = |AB|$ – елипсата става "безкрайно" сплесната и се изражда в двойна отсечка (фиг. 1, в).



а) б) в)

Фиг. 1.

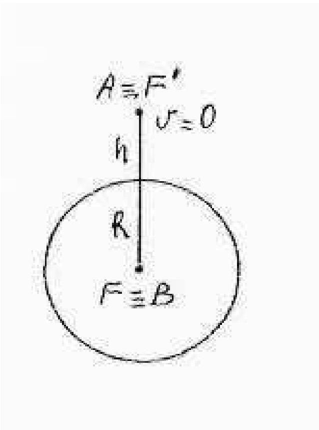
След припомняне на тези факти можем да разгледаме някои интересни случаи. Във всички тях траекторията е елипса, но не е задължително тялото, чието движение изследваме, да изминава цялата траектория – в някои случаи тя пресича земната повърхност, т.е. тялото пада на Земята.

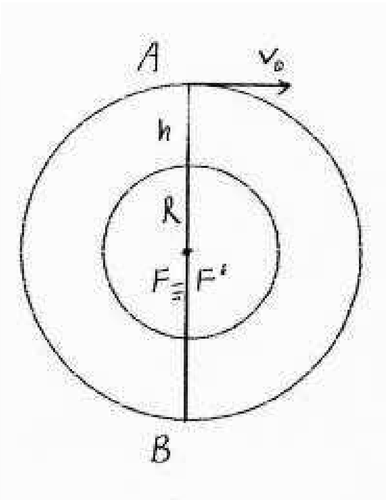
Траектория на тяло, хвърлено "хоризонтално"

Задача. Снаряд е изстрелян от височина h над земната повърхност "хоризонтално", т.е. перпендикулярно на отсечката, свързваща оръдието с центъра на Земята. Какъв е видът на траекторията в зависимост от големината v на скоростта?

Ние всъщност знаем как изглежда траекторията в два екстремни случая.

Първо, при $v = 0$ снарядът просто пада към центъра на Земята – цялата траектория представлява двойната отсечка OA (фиг. 2), но разбира се, спира, достигайки земната повърхност. Това е вторият от разгледаните по-горе гранични случаи ("безкрайно сплесната елипса, чиито фокуси съвпадат с краищата й). Голямата ос на тази "елипса" има дължина $|OA| = R + h$.





Фиг. 2. Фиг. 3.

Другият познат граничен случай е, когато v се определя от (4):

$$v_0^2 = G\frac{M}{R+h},$$

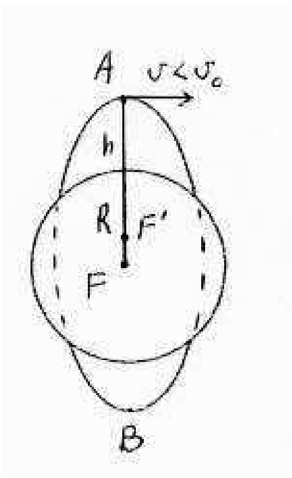
т.е. – когато $\varepsilon = 0$ и траекторията е окръжност (фиг. 3). В този случай и двата фокуса са в центъра на Земята, а голямата ос има дължина $2(R + h)$.

Да опитаме сега да си представим как изглежда елипсата в случая, когато началната скорост удовлетворява неравенствата:

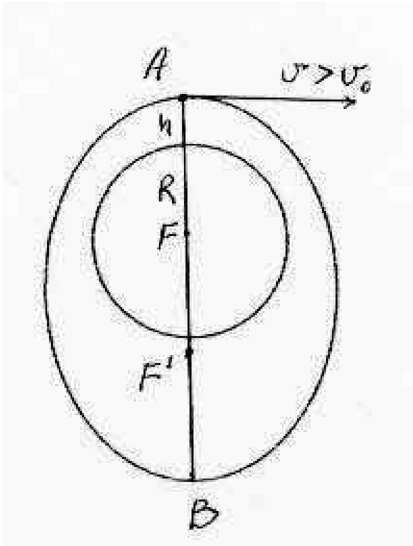
$$0 < v < v_0 = \sqrt{G\frac{M}{R+h}}. \tag{6}$$

За нея знаем, че единият й фокус е в т. O. Щом посоките на началната скорост и отсечката OA са перпендикулярни, според цитираното по-горе свойство на елипсите, т. A е връх на елипсата и тогава направлението на голямата ос се задава от отсечката OA.

Остава да определим къде е другият фокус, F', на елипсата. За целта ще използваме малко интуиция и нещо като съображения за непрекъснатост: щом в първия частен случай (при $v = 0$) т. $F' \equiv$ т. A, а във втория (при $v = \sqrt{G\frac{M}{R+h}}$) – т. $F' \equiv$ т. O, то при изпълнение на неравенствата (6) вторият фокус би бил в някоя междинна точка от отсечката OA. При това положение елипсата би изглеждала както на фиг. 4, а голямата й ос би била по-къса от $2(R + h)$.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Във всички тези случаи дали снарядът ще падне на земната повърхност или няма да падне, зависи от големините на v и h и може да бъде предмет на отделни количествени разглеждания.

Какво става с нашата елипса обаче при по-нататъшно увеличаване на скоростта, т.е., когато:

$$v > v_0 = \sqrt{G\frac{M}{R+h}}\,. \tag{7}$$

За да избегнем математическите усложнения, ще продължим интуитивните разсъждения: когато началната скорост расте от нула до v_0, посоката на голямата ос, единият фокус (т. O) и единият връх на елипсата (т. A) се запазват, а другият фокус се измести постепенно от т. A до т. O. Няма физическа причина да смятаме, че този процес ще промени характера си и когато v продължи да расте, т.е. удовлетворява неравенството (7): направлението на голямата ос на елипсата остава непроменено, т. $F \equiv$ т. O, а F' продължава да се отдалечава от т. A – елипсата изглежда, както на фиг. 5, като сега голямата й ос е очевидно по-дълга от $2(R + h)$.

И така, най-общо можем да кажем: когато посоката на началната скорост е перпендикулярна на посоката към центъра на Земята, движението е по елипса с фокус в този център, връх в началната точка, и голяма ос с направление, определено от центъра и началната точка. При $v < v_0$ вторият фокус е върху отсечката AO, а при $v > v_0$ – извън нея.

Докога с нарастване големината на v ще продължава този процес? Дали винаги, колкото и голяма да бъде началната скорост, траекторията ще остава елипса? От математични съображения не можем да отговорим на този въпрос – всичко зависи от това, колко бързо расте голямата ос на елипсата (или разстоянието между фокусите й) с увеличаване на v. Ако например дължината на голямата ос е правопропорционална на v, ще трябва да заключим, че траекторията е винаги елипса, елипса, чиято голяма ос става безкрайна, когато и началната скорост стане безкрайно голяма. Възможен е обаче и друг вариант, при който голямата ос расте по-бързо и става безкрайност при някаква крайна стойност на началната скорост.

Тези съображения може да се преведат и на по-строг математичен език. При нарастване на началната скорост от 0 до v_0, ексцентрицитетът на елипсата се намали непрекъснато от 1 до 0. Единственото, което той може да прави при по-нататъшно увеличение на началната скорост, е да започне да расте (по определение ε е неотрицателно число!). И целият въпрос се свежда до това, дали ε може да стигне стойност 1 при крайна стойност на v, или става единица едва, когато v стане безкрайно голяма. А стойността $\varepsilon = 1$ е важна, защото при нея вече елипсата "се отваря" и се превръща в парабола, а при $\varepsilon > 1$ траекторията вече е хипербола.

Тъй като не правим количествени разглеждания, основаващи се на другите закони на Кеплер или на закона на Нютон (например, не търсим как изглежда уравнението на елипсата при различни стойности на v), не можем да решим кой от двата случая се реализира в действителност. Дилемата обаче може да се реши с помощта на енергетичния подход.

Нека пресметнем механичната енергия на нашия снаряд. Тъй като това е запазваща се величина, стойността ѝ е същата, каквато е била в момента на изстрелване. С помощта на формула (3) получаваме:

$$E_{\text{м}} = E_{\text{к}} + E_{\text{п}} = \frac{mv^2}{2} - G\frac{mM}{R+h}.$$

Оттук се вижда, че ако

$$v < \sqrt{2G\frac{M}{R+h}} = \sqrt{2}v_0, \tag{8}$$

то $E_{\text{м}} < 0$ и следователно траекторията е елипса.

Когато

$$v = \sqrt{2}v_0, \tag{9}$$

– а това не е нищо друго освен познатата ни втора космическа скорост (но за тяло, издигнато на височина h над земната повърхност), елипсата "се отваря" и се превръща в парабола. При още по-големи начални скорости траекторията вече е клонка от хипербола.

Пътят, по който достигнахме резултатите дотук илюстрира добре един от начините, по които разсъждават физиците, когато не могат (или не искат) да използват по-сложни математически средства.

Траектория на снаряд, изстрелян в различни посоки

Дотук разглеждахме движението на снаряд, изстрелян във фиксирана посока с различна големина на началната скорост. Да разгледаме сега обратния случай – нека е постоянна големината на скоростта, а да изследваме как се променя видът на траекторията в зависимост от началния ъгъл, под който е изстрелян снарядът спрямо хоризонта. За да не усложняваме нещата, ще разгледаме само случая $h = 0$, т.е. ще изследваме траекторията на снаряд, изстрелян с първа космическа скорост v_0 (вж. формула (5)) под различни ъгли от земната повърхност.

Какво всъщност знаем за елипсите, по които ще се движи снарядът? Знаем положението на техния общ фокус (центърът на Земята), познаваме една точка от траекторията (точката на хвърлянето), познаваме и тангентата в тази точка (посоката на началната скорост). От математиката е известно, че в полярни координати (ρ,φ) с начало на координатната система в единия фокус на елипса и полярна ос, насочена към другия фокус, уравнението на елипсата има вид:

$$\rho = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi},$$

където двата параметъра p и ексценрицитетът ε определят елипсата напълно. Познаването на точка от елипсата и на тангентата в тази точка по принцип осигурява две условия, които биха били достатъчни за определяне на p и ε. В нашия случай, макар че знаем къде е координатното начало (от което да отчитаме ρ), не знаем посоката, от която отчитаме ъгъла φ, т.е. не знаем посоката на голямата ос на елипсата. Тъкмо тук е разликата от предишния случай, в който снарядът се изстрелва “хоризонтално” – това гарантираше, че точката на изстрелването е *връх* на елипсата и можахме да изследваме и нейното положение, и промените във вида й с промяна на големината на началната скорост.

И така, ако се ограничим само с първия закон на Кеплер, задачата остава неопределена: положенията на един от фокусите, на една точка от елипсата и посоката на тангентата в тази точка, не са достатъчни за определяне на кривата. Разбира се, като цяло задачата не е неопределена, защото дотук никъде не сме използвали, че знаем *големината* на началната скорост – v_0. Като не желаем да се впускаме в по-сложни разглеждания, ще се ограничим само с частния случай, когато снарядът е изстрелян вертикално нагоре. Видът на траекторията в този случай е ясен – вертикална отсечка, т.е. отново имаме “безкрайно сплескана елипса ($\varepsilon = 1$) и единственото, което може да ни интересува, е размерът на голямата й ос. Затова по-нататък ще се занимаем със следната задача.

Задача. На каква височина над земната повърхност ще се издигне снаряд, изстрелян вертикално нагоре с първа космическа скорост?

Качествен анализ. Нека първо решим, дали в случая не е възможно да използваме познатата зависимост $h = \dfrac{v^2}{2g}$ за височината на издигане на тяло, хвърлено вертикално нагоре, която е валидна за движение в хомогенно гравитационно поле. Тъй като първа космическа скорост е от порядъка на 8 km/s, според цитираната формула снарядът би се издигнал примерно на височина 3200 km, което е почти половината от земния радиус – ясно е, че на такива разстояния от земната повърхност не можем да смятаме $g \approx 10$ m/s и ще трябва да използваме или законите на Кеплер, или закона на Нютон.

Какво показва анализът на размерностите? От кои величини би могла да зависи височината H, на която се издига над земната повърхност тяло, хвърлено вертикално нагоре с първа космическа скорост? Това, разбира се, са гравитационната константа G, масата M и радиусът R на Земята, както, разбира се, и самата първа космическа скорост v_0. Ако разсъждаваме така, би трябвало да предположим, че търсената зависимост е от вида:

$$[H] = [G]^a[M]^b[R]^c[v_0]^d,$$

където квадратните скобки, както обикновено, означават размерността на величината, заключена между тях. Според идеята на метода на размерностите, трябва да търсим уравнения, от които да определим степенните показатели a, b, c и d.

Тъй като основните механични величини (разстояние, време и маса) са три, от приравняването на степенните показатели на лявата и на дясната страна на равенството за всяка от тях ще получим три уравнения, а неизвестните са четири– би останал един свободен параметър, който няма от къде да определим. С този проблем можем да се справим, ако си спомним, че чрез формула (5) самата първа космическа скорост се изразява чрез останалите величини. При това положение можем да опростим търсената зависимост до:

$$[H] = [G]^k[M]^m[R]^n.$$

Като използваме традиционните означения за размерностите на основните величини (L – за дължина, T – за време и M – за маса) и отчетем, че $[G] = L^3T^{-2}M^{-1}$, $[M] = M$ и $[R] = L$, получаваме следната връзка между размерностите:

$$L^1 = (L^{3k}T^{-2k}M^{-k}).M^m.L^n.$$

Чрез приравняване на степенните показатели на L, T и M от лявата и от дясната страна на това равенство получаваме три уравнения:

$$1 = 3k + n$$
$$0 = -2k$$

$$0 = \mathrm{m} - \mathrm{k},$$

от които следва k = m = 0, n = 1.

Следователно методът на размерностите води до заключение, че търсената зависимост е от вида $H = qR$, където q е безразмерно число, най-вероятно от порядъка на единица.

Възможно ли е на качествено равнище да кажем нещо повече за стойността на параметъра q? В светлината на казаното по-горе, че траекторията (параметрите на елипсата) остава неопределена, докато не използваме информацията за v_0, отговорът на този въпрос е отрицателен.

Количествено решение. И в този случай енергетичният подход спасява от необходимостта да се пишат и решават уравнения на движение и т.н. Единственото, което ще използваме сега, са формулите (3) и (5). С помощта на (5) за кинетичната енергия на снаряда в момента на изстрелване намираме:

$$E_\text{к} = \frac{mv_0^2}{2} = G\frac{mM}{2R}. \tag{10}$$

Оттук и от (3) за пълната механична енергия на снаряда получаваме израза:

$$E_\text{м} = E_\text{к} + E_\text{п} = G\frac{mM}{2R} - G\frac{mM}{R} = -G\frac{mM}{2R}. \tag{11}$$

Тъй като в момента, когато се отдалечава максимално от Земята, кинетичната енергия на снаряда е нула, отдалечението r от центъра на Земята ще намерим чрез приравняване на пълната механична енергия (която се запазва) и потенциалната енергия в тази точка:

$$-G\frac{mM}{2R} = -G\frac{mM}{r},$$

от където веднага следва $r = 2R$, а за търсената височина над земната повърхност:

$$H = r - R = 2R - R = R,$$

т.е. над земята тялото ще се издигне на разстояние, точно равно на земния радиус. С други думи анализът на размерностите даде не само порядъка, но и точната стойност на търсената величина, защото се оказа, че $q = 1$!

А на езика на елипсите, който използвахме по-горе, полученият резултат показва, че центърът на сплеснатата елипса, по която се движи в този случай снарядът, е в точката на изстрелването.

Задача. За колко време ще падне върху земната повърхност тяло, пуснато да пада свободно от височина, равна на земния радиус?

Току що полученият резултат ще ни доведе бързо до отговора на тази задача. Наистина, същността на този резултат бе, че снаряд, изстрелян вертикално нагоре, се движи по "елипса", която се е изродила в двойна отсечка с един край (фокус F) в центъра на Земята, и друг край (фокус F') – на височина R над земната повърхност, т.е. точката на изстрелването представлява център на "елипсата". Пътят на снаряда нагоре и надолу представлява точно половината от тази "елипса", като горната и долната половини са симетрични една на друга. Следователно времето на полета на снаряда ще бъде половината от периода T_0 на "обикаляне" по цялата траектория. Интересуващото ни време T на свободно падане на тяло от височина R от своя страна е равно на времето за издигане, така че общо можем да кажем, че $T = T_0/4$.

Така въпросът се свежда до намиране периода на движение на тяло около Земята по елипса с голяма ос $2R$. Според третия закон на Кеплер, квадратите на периодите на обикаляне по две траектории се отнасят както кубовете от големите им оси. Оттук следва, че ако големите оси на две елипси са равни, равни ще бъдат и периодите на обикаляне по тях. Ние лесно можем да намерим периода на обикаляне по елипса с голяма ос

$2R$, защото познаваме движението в един частен случай на такава елипса: кръговото движение в околоземна орбита с радиус R представлява точно движение по елипса с голяма ос $2R$ и, което е съществено за случая, се извършва *равномерно* с първа космическа скорост. Тъй като дължината на окръжността е $2\pi R$, с помощта на формула (5) получаваме:

$$T_0 = \frac{2\pi R}{v_0} = \frac{2\pi R}{\sqrt{G\frac{M}{R}}} = 2\pi \frac{R^{3/2}}{\sqrt{GM}} .$$

Следователно времето, за което ще падне едно тяло от височина R, се определя от формулата:

(12) $$T = \frac{T_0}{4} = \frac{\pi}{2} . \frac{R^{3/2}}{\sqrt{GM}} .$$

Този резултат ще придобие по-привичен вид, ако си спомним, че земното ускорение на повърхността на Земята е $g = G\frac{M}{R^2}$, т.е. $\sqrt{GM} = R\sqrt{g}$. В този случай формула (12) придобива вид:

(13) $$T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R}{g}} .$$

Той е по-удобен за пресмятане и като заместим в него числените стойности на съответните величини, получаваме $T \approx 1250$ s ≈ 21 min.

Интересно е да сравним този резултат с резултата, който бихме получили, ако смятаме, че във всички точки от траекторията земното ускорение има една и съща стойност – g, т.е. смятаме земното гравитационно поле хомогенно и падането – равноускорително. Познатата за този случай формула има вид $T' = \sqrt{\frac{2R}{g}}$ и следователно отношението на двете времена е:

$$\frac{T}{T'} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1{,}11 .$$

Това, че истинското време за падане е само с около 10 % по-дълго от пресметнатото в приближение на хомогенно поле би трябвало да ни учуди – все пак на височина R над земната повърхност земното ускорение е 4 пъти по-малко, отколкото върху нея!

Интересно е, че това отношение не зависи нито от радиуса на Земята, нито от g, т.е. – не зависи и от масата на Земята. А това означава, че ако на Марс или на която и да е друга планета пуснете едно тяло да пада свободно, ако началната точка и центърът на планетата са равноотдалечени от повърхността ѝ, грешката, която ще направите при пресмятане на времето за падане при предположение за хомогенност на полето ще бъде все от порядъка на 10 %.

Теми за размисъл. Не може да не направи впечатление фактът, че както и да изстреляте снаряд с първа космическа скорост – и в хоризонтална, и във вертикална посока, големите оси на елипсите, по които се движи в двата случая са еднакви и равни на $2R$. Дали това е случайно съвпадение? Представете си, че изстрелваме снаряди с тази скорост последователно, като постепенно увеличаваме ъгъла спрямо хоризонта на началната скорост, като започнем от 0 º и свършим с 90 º: като че ли няма физична причина, поради която дължината на голямата ос на съответните елипси да има минимум или максимум за някакъв специален ъгъл в този интервал. Не означава ли това, че големите оси на всички елипси, по които се движат снарядите, изстреляни под различни ъгли от една и съща точка на земната повърхност с първа космическа скорост, са еднакви? А може би може да се докаже и по-общо твърдение – че подобно свойство имат елипсите, по които се движат снарядите, изстреляни под различни ъгли, но с еднаква начална скорост (не непременно v_0)? И, накрая, ако това е вярно, толкова ли е съществено, че снарядите изстрелваме от земната повърхност? С каква по големина скорост трябва да минават през дадена точка на пространството тела, които се движат в различни посоки по елипси с фокус в центъра на Земята, така че големите оси на елипсите да са равни?

Въпросите с подобен характер могат да се множат почти неограничено. Техните отговори са били известни още на Нютон, само че той ги е получавал със средства, значително по-ограничени от тези, с които разполагаме днес (да споменем само, че нему е бил непознат енергетичният подход – самото понятие енергия се появява далеч след Нютон). Тези отговори са разсеяни из многобройни книги с най-различен характер – от учебници и сборници със задачи по механика до научно-популярни издания и журнални статии. Нашата цел бе да покажем само как, започвайки от решението на един относително прост проблем, можем да стигнем до такива въпроси. Защото умението да се задават въпроси също следва да се формира целенасочено – в края на краищата то лежи в началото на всяка наука.

За праха в орбиталните станции и
за океанските приливи и отливи

Знаете ли как, наблюдавайки работата на една чистачка в лаборатория, да познаете дали лабораторията е на Земята или в космическа станция? Отговорът е малко неочакван: в наземната лаборатория чистачката бърше прах само по пода и плотовете на масите, а в орбита трябва да чисти прах и по тавана!

Това, че в наземната лаборатория прахът се събира по пода и по масите е ясно – прашинките падат надолу под действие на силата на тежестта. Отговорът обаче е странен най-малкото заради това, че телата в орбиталната станция, включително и прашинките, се намират в състояние на безтегловност и, ако се отчита само този факт, би трябвало прахът да се носи из въздуха на станцията, без да се отлага никъде.

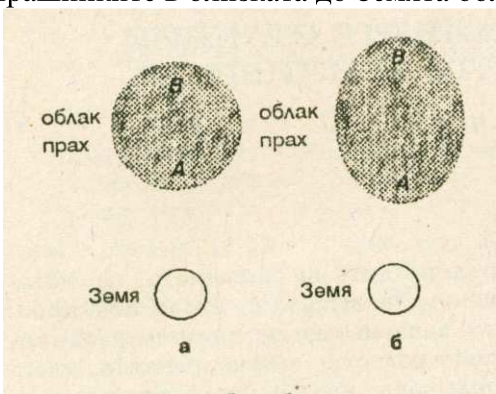
Съществува едно широко известно природно явление – наличието във всеки момент време на две приливни вълни върху Земята – едната върху нейната страна, обърната към Луната, а другата – на срещуположната страна (и, разбира се, две отливни вълни). Когато става дума за това явление, обикновено се казва, че то се дължи на привличането на Луната. Най-общо казано, това наистина е така, но ако се опитаме да вникнем в детайлите на явлението, ще установим, че нещата не стоят така просто, защото още от времето на Галилей е известно, че ускоренията, които получават различните тела от гравитационната сила, са еднакви и следователно, *ако по цялата Земя лунната гравитация бе една и съща,* не би трябвало да има относително преместване на водните маси спрямо земната кора. Единственият извод, който можем да направим от наличието на приливи и отливи е, че тяхната поява е свързана с нехомогенността на гравитационното поле на Луната – наистина, то е по-силно в частта от земната повърхност, обърната към Луната и по-слабо – на противоположната страна.

В сега действащия учебник по география за 7. клас (с автори П. Петров и др.) име урок (незадължителен), в който се прави опит за обясняване появата на приливни океански вълни. От гледна точка на обучението по физика това обяснение е незадоволително, тъй като се опира съществено на понятието “центробежна сила” – едно понятие, непознато за седмокласниците (а и не само на тях). Отделна и обширна тема е коректността на обяснението от физична гледна точка – тук не става дума за това. Въпросът е възможно ли е явлението да се обясни от гледна точка на наблюдател, свързан с инерциална отправна система, т.е. така, както правим в училища по физика? (Центробежните сили се появяват в неинерицални системи, изучаването на които отдавна е изпаднало от училищните програми по физика.) Всъщност, поставеният въпрос е риторичен, защото по принцип всяко механично явление може да намери своето обяснение спрямо инерциалните отправни системи. Въпросът по-скоро е не дали е възможно, а как да се поднесе обяснението на равнището на училищната физика и математика. Оказва се, че така поставен, въпросът има различни отговори, които лесно се откриват в литературата. По-долу ще представим един от тях, който ни се струва най-естествен и убедителен, и от който веднага става ясна връзката между приливите и отливите от една страна, и поведението на праха в космическите станции.

Общото между поведението на праха в орбиталната станция и появата на приливни вълни е, че, първо, и двете явления протичат в нехомогенно гравитационно поле. Второ, и в двата случая разглежданите тела (орбиталната станция и Земята) **не могат да се разглеждат като материални точки**. За да разберем ролята на нехомогенността, нека разгледаме как ще се държи сферичен облак прах, попаднал в земното гравитационно поле (фиг. 1,а). Ясно е, че като цяло, облакът ще пада към центъра на Земята. Тъй като земното ускорение в дадена точка зависи от разстоянието r до центъра на Земята:

(1) $$g = G\frac{M}{r^2}$$

(тук G е гравитационната константа, а $M = 5{,}98.10^{24}$ kg – масата на Земята), различните части на облака се намират в нехомогенно поле – то е по-силно в точките от областта A, която е по-близо до Земята, и по-слабо в по-далечната област B. Поради това гравитационното привличане, което действа на прашинките в областта B е по-слабо от привличането, което действа на прашинките в близката до Земята област A. В резултат



Фиг. 6.

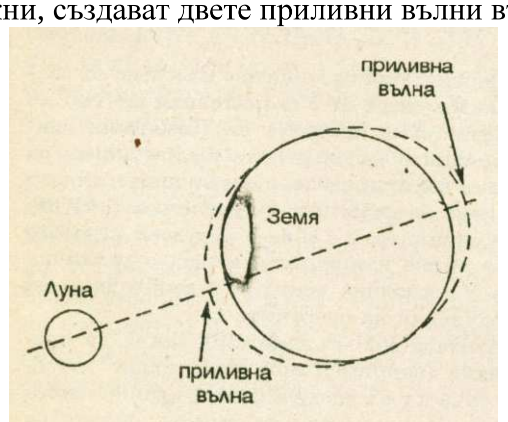
ускоренията (а следователно и скоростите) на прашинките в частта A ще бъдат по-големи от тези в частта B и след известно време облакът ще загуби сферичната си форма – той ще се издължи и ще изглежда примерно както на фиг. 6,б).

За си представим сега, че облакът е затворен в сферична орбитална станция. Известно е, че движението на орбиталните станции не е нищо друго, освен едно безкрайно продължително свободно падане, при което само наличието на тангенциална към земната повърхност компонента на скоростта не позволява на станцията да падне върху Земята. А щом прахът, който се намира във въздуха на станцията, пада свободно, образуваният от него облак ще се стреми да придобие формата, показана на фиг. 6,б – при това положение онези части от издължаващия се облак, които биха попаднали извън стените на станцията, фактически се отлагат върху нейния под и таван, т.е. върху най-близките и най-далечните спрямо Земята части на станцията. Затова именно чистачката, която работи в орбитална станция, трябва да чисти прах и от пода, и от тавана.

Не бива да се остава с впечатление обаче, че чистачките в орбиталните станции вършат два пъти повече работа, отколкото ако работеха в наземна лаборатория. Не бива да се забравя, че на земята прашинките се отлагат под действие на **силата на тежестта**, която им действа, докато в орбиталната станция отлагането по пода и по тавана става под действие на **разликата** между силата на тежестта, действаща в различните части на лабораторията. А тази разлика е съществено по-малка от самата сила на тежестта. (Да оставим настрана факта, че по закона на Нютон за гравитацията, самата сила на тежестта в орбиталната станция е по-малка отколкото на Земята.) Да го кажем накратко: *макар да ѝ се налага да бърше два пъти по-голяма площ, чистачката в орбиталната станция ще обира праха много по-рядко от колежките си на Земята.*

Възможно ли е сега разбирането на това, което става с праха в една орбитална станция, да ни помогне да разберем причината за появата на **две** приливни вълни върху Земята. Вярно е, че свойствата на Земята като тяло са твърде различни от свойствата на облак прах, т.е. тя съвсем не представлява съвкупност от несвързани една с друга материални точки, но все пак тя не е и идеално твърдо тяло. Не само океанските маси вода, но дори и частите от нейната кора притежават способността да се преместват една спрямо друга под действие на приложените върху тях сили.

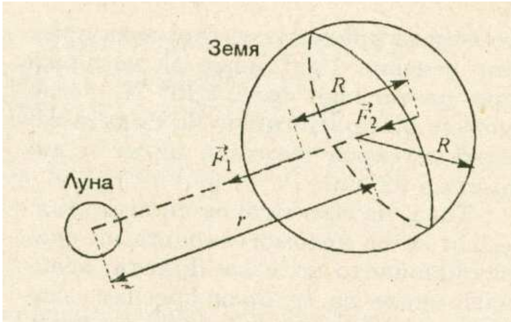
Нека сега се абстрахираме от орбиталното движение на Земята около Слънцето. Когато не търсим голяма прецизност, обикновено казваме, че Луната обикаля около Земята, смятайки при това, че масата на Земята е много по-голяма от масата на Луната и затова влиянието на последната върху движението на земята може да се пренебрегне. Отношението между масите на двете тела обаче е крайно и това означава, че Земята не може да се смята неподвижна. Фактически двете тела извършват своите движения около техния общ център на масите (който, между впрочем, се намира някъде вътре в Земята.) С други думи, можем да смятаме, че Земята извършва едно свободно падане около този център на масите в гравитационното поле на Луната. Но това поле също е нехомогенно! А щом пада свободно в нехомогенно гравитационно поле, Земята ще се стреми да приеме формата на облака прах от фиг. 6,б. Деформациите, които получава при това, са незабележими, но не и неоткриваеми за по-прецизни апаратури, а водите в океаните, като по-подвижни, създават двете приливни вълни върху земното кълбо



Фиг. 7.

(фиг. 7). (Ако трябва да обясним известния факт, че максимумите на приливните вълни не се намират на една права с центровете на Земята и Луната, трябва да отчетем и околоосното въртене на Земята.)

Не е трудно на направените разглеждания да се придаде и количествена форма. Да разделим мислено Земята на две еднакви полукълба, едното разположено по-близко,



Фиг. 8.

другото – по-далече от Луната (фиг. 8.). Гравитационната сила F_1, с която Луната привлича близката половина, е по-голяма от силата F_2, с която привлича по-далечната половина. Резултатът е еквивалентен на наличието на сила $\delta F = F_1 - F_2$, която се стреми да раздели двете половини, и тъй като това е невъзможно, тя просто деформира Земята. Ако в рамките на направените приближения смятаме, че масите на всяка от тези половини с разположени на един земен радиус една от друга ($R = 6{,}38.10^6$ m, но това предположение е **произволно**, то може да бъде оправдано само по порядък!) (фиг. 8), силата δF ще бъде:

(2) $$\delta F = G\frac{M}{2}\left[\frac{1}{\left(r-\frac{R}{2}\right)^2}-\frac{1}{\left(r+\frac{R}{2}\right)^2}\right],$$

където $m = 7{,}35.10^{22}$ kg е масата на Луната, а $r = 3{,}84.10^8$ m – разстоянието между центровете на Земята и Луната. Заместването на тези стойности в (2) дава като резултат $\delta F = 3{,}3.10^{18}$ N. Това е порядъкът на силата, която се стреми да раздели двете половини на Земята. Като се има предвид, че стоманен прът със сечение 1 m^2 може да издържи на опън сила 5.10^8 N, лесно можем да пресметнем, че силата δF може да скъса стоманен "прът" с диаметър 92 km[1]!

Това, че ефектите от силите, дължащи се на нехомогенността на гравитационното поле на Луната в обема от пространството, зает от Земята, не винаги може да се пренебрегнат, знаят например специалистите по физика на високите енергии. Така например пръстенът на големия електрон-позитронен ускорител LEP в ЦЕРН, чиито диаметър е 8,5 km, се деформира с около 2 mm по време на всеки лунен цикъл. За да се поддържа постоянството на енергията на снопа от частици, учените коригират по подходящ начин ускоряващите полета.

Детайли по разглежданите въпроси могат да се намерят в статията на J.M. Woolsey, публикувана във Phys.Educ., 29, 3, 1994 и в цитираната към нея литература.

И така, "поуката" от направените разглеждания е, че причина за приливите и отливите не е просто "привличането на Луната", а нехомогенността на гравитационното поле на Луната в областта от пространството, заето от Земята. Или, ако трябва да изкажем нещата по-обобщено, причините са две:

– нехомогенността на лунното гравитационно поле, и

– невъзможността Земята да се разглежда като материална точка (крайната стойност на отношението между земния диаметър и разстоянието Луна–Земя.

[1] Ако прегледате материала от II част/Обучение/Съвети, озаглавен "За гравитацията – по-нагледно", ще установите, че стоманен прът, който може да замени гравитационното привличане между Земята и Луната, трябва да е дебел около 720 km, т.е почти един порядък повече. Фактът, че разликата е тъкмо **един** порядък, не е случаен!

Колкото до обучението, личното ми мнение е, че щом не можем да обясним едно явление както трябва, по-добре въобще да не се опитваме да го правим. Затова смятам, че ако ще трябва да обясняваме на децата причината за приливите, това трябва да става не в часовете по география, а в часовете по физика, и то – в по-горните класове.

В кои точки гравитацията е нула

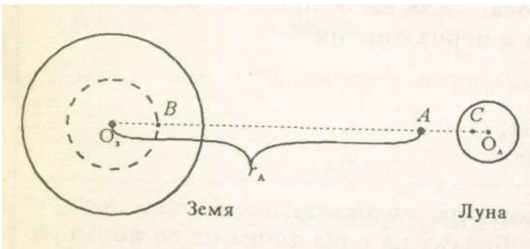
Върху правата, която свързва центровете на Земята и Луната има **три** точки, в които интензитетът на създаденото от тях гравитационно поле е нула[2]. Когато се обсъждат полети до Луната се споменава една от тях – онази, която се намира в космическото пространство и на фиг. 9 е означена като т. A. Това, че се споменава само тя е в известен смисъл естествено – оставалите две – т. B и т. C, се намират съответно във вътрешността на Земята и във вътрешността на Луната. Тъй като т. A е извън двете тела, създадените от тях гравитационни полета са като от точкови маси и затова за определяне на гравитационното сила в тази точка е валиден законът на Нютон. Ето защо ако с $l = |O_{З.}O_{Л.}|$ означим разстоянието между центровете на двете небесни тела, разстоянието r_A на т. A до центъра на Земята се определя от изискването за равенство между големините на интензитетите на двете гравитационни полета:

$$G\frac{M}{r_A^2} = G\frac{m}{(l - r_A)^2}, \tag{1}$$

където M и m са масите съответно на Земята и Луната, а G – гравитационната константа. Решението на това уравнение е:

$$r_A = \frac{l}{1 + \sqrt{\dfrac{m}{M}}}$$

и като отчетем, че $m/M = 81$, получаваме $r_A = (9/10)l$. За да сме сигурни, че получената стойност е вярна, трябва да проверим дали т. A не попада във вътрешността на Луната (в противен случай нямаме право да разглеждаме Луната като точкова маса). Радиусът на Луната ($R_{Л.} = 1740$ km) обаче е много по-малък от $l/10$, така че пресмятанията дотук са правилни.



Фиг. 9.

Прости качествени разсъждения показват, че т. A не е единствена. Наистина, ако от повърхността на Земята се придвижваме към центъра й по правата $O_{З.}O_{Л}$, земното гравитационно поле е насочено към земния център и намалява, като в самия център интензитетът му става нула. При това преместване противоположно насоченото поле на Луната също намалява, но по закона на Нютон, при което никъде не става нула. Оттук следва, че непременно в някоя точка (т. B на фиг. 9) интензитетът на общото поле ще

---

[2] В този смисъл и отговорът на въпроса в колко точки е нула общата гравитационна сила, с която Земята и Луната действат на едно тяло, е **три**, а не **една**, както е посочено в някои сборници. (Вж. напр. М.Е. Тульчинский, *качественные задачи по физике в средней школе*, М., Просвещение, 1972.)

бъде нула. От подобни разсъждения следва и съществуването на т. C във вътрешността на Луната. (Други точки с подобно свойство не може да има, защото само върху отсечката $O_{З}O_{Л}$ посоките на двете полета са противоположни.)

За да се определи разстоянието r_B от центъра на Земята до т. B трябва да съставим уравнение, подобно на (1). В него полето на Луната отново се описва от закона на Нютон, но сега трябва да отчетем, че полето на земните маси, намиращи се извън сферата с радиус r_B е нула. Затова уравнението има вида:

(2) $$G\frac{m_B}{r_B^2} = G\frac{m}{(l - r_B)^2},$$

където m_B е масата на онази част от Земята, затворена в сфера с радиус r_B. Ако приемем, че Земята е хомогенна и означим с ρ плътността й, то $m_B = \frac{4}{3}\pi r_B^3$, така че всъщност (2) представлява едно кубично уравнение за r_B:

(3) $$r_B(l - r_B)^2 = \frac{3m}{4\pi\rho}.$$

Въпреки, че със сигурност може да се напише израз за неговото точно решение, ще се задоволим с една приблизителна стойност за r_B. За целта, като отчитаме, че със сигурност $r_B << l$, в разликата $(l - r_B)$ ще пренебрегнем умалителя и тогава от (3) получаваме:

(4) $$r_B = \frac{3m}{4\pi\rho l^2}.$$

Като заместим $m = 7{,}25.10^{22}$ kg, $\rho = 5{,}5.10^3$ kg/m^3 и $l = 3{,}84.10^8$ m, за търсеното разстояние намираме $r_B \approx 23$ m, т.е. т. B е много близо до центъра на Земята (и пренебрегването на r_B спрямо l се оказва оправдано). Ако заместим получената стойност в (2) ще се убедим, че тя осигурява равенство на големините на двете полета в т. B с точност, по-добра от 1% - факт, който също оправдава направеното приближение. (Всъщност ние допускаме много по-голяма грешка, като смятаме Земята хомогенна. Тъй като плътността й около нейния център е значително по-голяма от средната плътност, фактическо положение на т. B е още по-близо да центъра на Земята.

По аналогичен начин може да се определи и положението на т. C – в този случай полето на Земята е като на точкова маса, а полето на Луната не е:

(5) $$G\frac{M}{r_C^2} = G\frac{m_C}{(l - r_C)^2},$$

където $m_C = \frac{4}{3}\pi\rho'(l - r_C)^3$ е лунната маса, съсредоточена в сфера с радиус $(l - r_C)$, а ρ' е плътността на Луната. Като заместим m_C с равното му в (5), получаваме:

(6) $$\frac{M}{r_C^2} = \frac{4}{3}\pi\rho'(l - r_C).$$

Ако, както в предишния случай, в множителя r_C^2 използваме приближението $r_C \approx l$, за разстоянието от центъра на Луната до т. C получаваме израза:

(7) $$l - r_C = \frac{3M}{4\pi\rho' l^2}.$$

Тъй като $M = 6.10^{24}$ kg, а $\rho' = 3{,}3.10^3$ kg/m^3, от (7) намираме $l - r_C \approx 3{,}2$ km. Точността на този резултат е по-лоша, отколкото в предишния случай, но порядъкът на величината е правилен.

Би ли могло наличието на т. B и т. C да има някакво практическо значение? За съжаление, и двете точки лежат дълбоко под повърхността на Земята, съответно – на Луната. Интересен е обаче следният факт. Точка B не е фиксирана точка от земното кълбо – луната обикаля около Земята и заедно с нея се измества и т. *B*, оставайки, разбира се, на разстояние r_B от центъра на Земята. За разлика от това т. *C* е една фиксирана точка във вътрешността на Луната, тъй като последната е обърната винаги с една и съща своя страна към Земята. Затова, ако можехме да прокопаем тунел до тази точка, бихме разполагали с лаборатория, в която интензитетът на гравитационното поле е нула.

Въпрос: В кои точки големините на гравитационните сили, с които Земята и Луната привличат едно тяло са равни?

Отговор: Предвид направените по-горе разглеждания за гравитацията, един очевиден отговор е: във всяка от трите точки *A*, *B* и *C* на фиг. 9 силите, с които Земята и Луната биха привличали една материална точка са нула. Особеност на тези точки е, че не само големините на двете сили са равни, но и посоките им са противоположни, така че в тях *интензитетът* на гравитационното поле е нула.

Друг въпрос е дали това са *всички* точки, в които *големините* на двете сили са равни. Отговорът на този въпрос е отрицателен: броят на такива точки е безкрайно голям. За да определим къде лежат те, трябва да фиксираме някаква координатна система. Ако изберем нейното начало в центъра на Земята, насочим оста *Ox* към центъра на Луната, а за масите и разстоянието между двете небесни тела използваме същите означения, като по-горе, координатите (x, y, z) на търсените точки ще удовлетворяват равенството:

$$G\frac{M}{x^2+y^2+z^2}=G\frac{m}{(x-l)^2+y^2+z^2}\,. \tag{8}$$

Разбира се, за да напишем това равенство, негласно сме предположили, че търсените точки са извън пространството, заето от Земята и от Луната, така че създадените от тях гравитационни полета са като от *точкови* маси.

Несложни преобразования (8) водят до заключение, че геометричното място на тези точки е сфера с радиус $\dfrac{\sqrt{mM}}{M-m}l$, чиито център лежи в посока към Луната върху правата, свързваща центровете на двете небесни тела на разстояние $\dfrac{M}{M-m}l$ от центъра на Земята.

Лесно се проверява, че лъчът от центъра на Земята към центъра на Луната пробожда въпросната сфера в две точки: едната е известната ни вече т. *A* (фиг. 9), а втората – от другата страна на Луната. Като се използват данните за масите на двете небесни тела, за разстоянието *l* между центровете им и за радиуса на Луната, лесно се проверява, че Луната лежи изцяло във вътрешността на въпросната сфера. Този факт показва, че предположението, въз основа на което написахме равенство (8) е оправдано.