

## Две лампи – в паралел и в серия (и идея за учебен изследователски проект)

Задайте на електротехник въпрос: Как ще светят две лампи с нагряваща се нишка и различни мощности, ако ги включим в мрежата последователно? Вероятно без да се замисли той би отговорил – маломощната ще продължи да свети, а по-мощната няма да свети.

Ако го помолите за обяснение, той би разсъждавал приблизително така: мощните лампи имат малко съпротивление, а маломощните – голямо съпротивление. Ако в по-високоомната верига на маломощна лампа включим последователно малко съпротивление, токът ще отслабне, но промяната ще бъде малка и лампата ще продължи да свети, макар и по-слабо. Обратно, когато в по-нискоомната верига на мощната лампа включим последователно голямо съпротивление, токът намалява съществено и понеже мощността е пропорционална на квадрата на тока, лампата няма да свети.

Тези разсъждения са на качествено равнище и са в основата си правилни. Ние обаче искаме да им придадем и количествен характер, за да имаме представа какъв смисъл в случая имат изрази като малко и/или голямо съпротивление, малко и/или съществено намаляване на тока и т.н. За целта ще решим следната задача.

**Задача.** Как ще светят две лампи с нажежаема нишка и мощности съответно  $P_1 = 100 \text{ W}$  и  $P_2 = 25 \text{ W}$ , когато са включени в мрежата ( $U = 220 \text{ V}$ ) последователно?

**Решение** в нулево приближение. Нулево приближение наричаме решението на един хипотетичен седмокласник – отличник по физика, който знае закона на Ом, формулите за последователно свързване на резистори и за мощност на ток, но не е чувал, че съпротивлението на металните проводници зависи от температурата.

От формулата  $P = \frac{U^2}{R}$  за съпротивленията на двете лампи намираме

$$R_1 = \frac{U^2}{P_1} = 484 \text{ } \Omega \text{ и } R_2 = \frac{U^2}{P_2} = 1936 \text{ } \Omega, \text{ т.е. } R_1 : R_2 = 1 : 4. \text{ Оттук следва, че при}$$

последователно свързване общото напрежение ( $220 \text{ V}$ ) се разпределя между лампите в същото отношение  $1 : 4$ , т.е. напрежението върху по-мощната лампа ще бъде  $U_1 = 44 \text{ V}$ , а върху по-маломощната –  $U_2 = 176 \text{ V}$ . Тъй като  $U_1 = \frac{U}{5}$ , от формулата  $P = \frac{U^2}{R}$  следва,

че 100-ватовата лампа ще консумира 25 пъти по-малка мощността, т.е. намалението при нея е с 96 %, и мощността ѝ ще бъде едва 4 % от номиналната. По аналогичен начин от

равенството  $U_2 = \frac{4U}{5}$  заключаваме, че консумираната от 25-ватовата лампа мощност

ще бъде  $\left(\frac{4}{5}\right)^2 = 0,64 = 64 \%$  от номиналната, т.е. намалява само с 36 %.

И така, в нулево приближение отговорът на зададения в условието на задачата въпрос е: по-мощната лампа със сигурност няма да свети, а маломощната ще свети, но забележимо по-слабо. Това заключение е в съгласие с предполагаемия отговор на електротехника.

**Качествен анализ** на нулевото приближение. Какво може да не е наред в нулевото приближение? Не е наред негласното предположение, че и при последователно свързване отношението между съпротивленията на двете лампи остава  $1 : 4$ . (Седмокласникът би възразил, че съпротивленията не зависят от това как са свързани резисторите – успоредно или паралелно – и погледнато абстрактно, той е прав.) Действителността обаче е по-друга: отношението  $1 : 4$  би се запазило само, ако и

при последователното свързване температурите на нишките са еднакви. В конкретния случай ситуацията е по-сложна. Полученият резултат показва, че в този случай нишката на 100-ватовата лампа ще се нагрее едва-едва, а това означава, че съпротивлението ѝ ще бъде много по-малко, отколкото когато работи в нормален режим. Режимът на работа на 25-ватовата лампа се променя по-малко, нейното съпротивление също намалява спрямо това при нормално светене, но намалението ще бъде по-малко отколкото при 100-ватовата лампа. Тези качествени разсъждения показват, че отношението между съпротивленията при последователно свързване няма да бъде както преди 1 : 4, а някакво 1 :  $k$ , където  $k$  е число, със сигурност е по-голямо от 4. И ако сега следваме логиката на нулевото приближение, трябва да заключим, че напрежението на 100-ватовата лампа ще бъде не 44 V, а още по-малко, а на 25-ватовата – не 176 V, а повече. Това затвърдява извода, че първата няма да свети и, че светенето на втората ще бъде още по-близко до нормалното, отколкото пресметнахме (повече от 64 %).

За да отговорим на въпроса доколко на светенето на лампите влияе зависимостта на съпротивлението от температурата, трябва отново да изоставим качествените разсъждения. Съмненията във верността на нулевото приближение са резултат от факта, че съпротивленията на лампите зависят от температурата, а тя от своя страна зависи от тока  $I$  през лампата, т.е. съпротивлението  $R$  се оказва функция на тока:  $R = R(I)$ . Това означава, че волтамперните характеристики на лампите не са линейни. Теоретичното определяне вида на функцията  $R = R(I)$  е сложно, защото макар да знаем как съпротивлението зависи от температурата (линейно<sup>1</sup>), не знаем как самата температура зависи от тока. За да търсим как температурата на нишката  $T$  зависи от тока  $I$ , трябва да построим сложен **физичен модел**, който отчита топлинния баланс в нишката: отделеното в нея количество топлина ( $RI^2$ ), излъчената по закона на Стефан–Болцман енергия ( $\sim \sigma T^4$ ), енергията на погълнатото от нишката лъчение, връзката между количеството топлина и температурата ( $cm\Delta T$ ), и т.н., и т.н. (В “и т.н.” влизат енергиите, обменени от нишката чрез топлообмен с газа в лампата, чрез топлопроводност – с двата метални държателя на нишката и др., които от своя страна зависят от конструктивните особености и на нишката, и на лампата като цяло.)

Оказвайки се в невъзможност да предложим достатъчно прост физичен модел за отчитане влиянието на температурата, т.е. за намиране вида на волтамперната характеристика  $U = R(I)I$ , ще прибегнем до друг подход – към изграждане на прост **математичен модел** за тази зависимост.

**Поправка** към нулевото приближение. Най-простото предположение, което можем да направим е, че съпротивлението е линейна функция на тока:

$$(1) \quad R = pI + q,$$

където  $p$  и  $q$  са два подлежащи на определяне параметъра. Смисълът на  $q$  е ясен – това е съпротивлението на нишката, когато през нея не тече ток. Параметърът  $p$  определя доколко е съществена зависимостта на съпротивлението от температурата.

С каква информация разполагаме за определяне на  $p$  и  $q$ ? Преди всичко, можем да пресметнем токовете през всяка от лампите при напрежение 220 V: за 100-ватовата

$$\text{лампа токът е } I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{220}{484} = 0,4545 \text{ A, а за 25-ватовата – } I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{220}{1936} = 0,1136 \text{ A.}$$

Знаем освен това, че съпротивлението на металите е линейна функция на температурата, като температурният коефициент на съпротивление за волфрама е  $\alpha =$

<sup>1</sup> При това линейната зависимост е само едно приближение. Опитът показва например, че връзката между специфичното съпротивление  $\rho$  на волфрама и абсолютната температура в интервала от 300 K до 3655 K се описва добре с формулата  $T = 3,05 \cdot 10^8 \cdot \rho^{0,83}$ , което означава, че всъщност нарастването на специфичното съпротивление е по-бързо от линейно. (Вж. на сайта <http://www.juy.fi/ipho> експерименталната задача от Международната олимпиада по физика през 2005 г.)

$4,5 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ . Това позволява да пресметнем съпротивления на нишките на лампите, когато през тях не тече ток. Като имаме предвид, че работната температура на нишките при нормално осветение е около 3000 K, лесно пресмятаме, че при стайна температура (т.е. – когато ток не тече) съпротивленията са кръгло 15 пъти по-малки

( $\frac{R}{R_0} = 1 + \alpha \Delta t = 1 + 4,5 \cdot 10^{-3} \cdot 300 = 14,5 \approx 15$ ). Така получаваме, че при  $I = 0$ ,

съпротивленията са съответно:

$$\text{за 100-ватовата лампа} \quad R_1^0 = \frac{484}{15} \approx 32 \text{ } \Omega$$

$$\text{за 25-ватовата лампа} \quad R_2^0 = \frac{1936}{15} \approx 130 \text{ } \Omega.$$

С тази информация за коефициентите  $p$  и  $q$  на 100-ватовата лампа получаваме две уравнения:

$$\text{при } I = 0 \quad 32 = p \cdot 0 + q, \quad \text{т.е. } q = 32,$$

$$\text{при } I = 0,4545 \quad 484 = p \cdot 0,4545 + 32.$$

От второто намираме  $p = 1033$ , така че в линейно приближение зависимостта на съпротивлението от тока за 100-ватовата лампа ще бъде:

$$(2) \quad R_1(I) = 1033 \cdot I + 32,$$

а волтамперната характеристика:

$$(3) \quad U_1(I) = R_1(I) \cdot I = 1033 \cdot I^2 + 32 \cdot I.$$

По аналогичен начин, стойностите на  $p$  и  $q$  за 25-ватовата лампа се определят от равенствата:

$$\text{при } I = 0 \quad 130 = p \cdot 0 + q, \quad \text{т.е. } q = 130,$$

$$\text{при } I = 0,1136 \quad 1936 = p \cdot 0,1136 + 130.$$

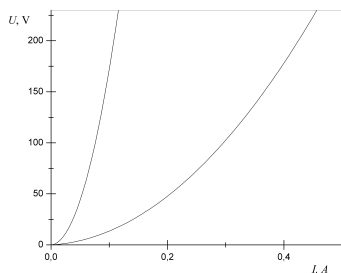
За  $p$  получаваме стойността  $p = 16912$ , така че съпротивлението на 25-ватовата лампа се описва с формулата:

$$(4) \quad R_2(I) = 16912 \cdot I + 130,$$

а волтамперната ѝ характеристика – с формулата:

$$(5) \quad U_2(I) = R_2(I) \cdot I = 16912 \cdot I^2 + 130 \cdot I.$$

Графиките на зависимостите (3) и (5) са показани на фиг. 1 (по-стръмната крива съответства на 25-ватовата лампа, разбира се).



Фиг. 1

Познаването на волтамперните характеристики позволява да намерим при какъв ток сборът от  $U_1(I)$  и  $U_2(I)$  дава 220 V (т.е. – какъв ток тече, когато лампите са свързани последователно. Като съберем (3) и (5) и отчетем, че  $U_1(I) + U_2(I) = 220 \text{ V}$ , за търсения ток получаваме квадратното уравнение:

$$(6) \quad 17945 \cdot I^2 + 162 \cdot I - 220 = 0.$$

Неговият неотрицателен корен е  $I = 0,1063$ , а с тази стойност по формулите (3) и (5) пресмятаме и съответните напрежения върху лампите:

$$(7) \quad U_1 = 15 \text{ V} \quad \text{и} \quad U_2 = 205 \text{ V}.$$

С получените стойности за мощностите на двете лампи при последователно свързване намираме:

$$(8) \quad P_1 = U_1 I = 15 \cdot 0,1063 \approx 1,6 \text{ W}$$

$$P_2 = U_2 I = 205 \cdot 0,1063 \approx 21,8 \text{ W}.$$

Като сравним с резултатите от нулевото приближение виждаме, че намалението на мощността на 100-ватовата лампа е не с 96 %, а с повече от 98 %, а на 25-ватовата не с 36 %, а с по-малко от 12 %.

Не бива да забравяме обаче, че този резултат получихме в рамките на възможно най-простия математичен модел, а доколко той отговаря на действителността можем да съдим, ако направим **опитна** проверка, за която е необходим комбиниран измервателен уред. Тъй като обикновено нито мрежовото напрежение е точно 220 V, нито номиналните мощности на лампите са точно 100 W и 25 W, това изисква първо да измерим напрежението на мрежата и токовете през всяка от лампите, когато са включени поотделно в нея. С получените данни пресмятаме действителните мощности на двете лампи ( $P = IU$ ). След това включваме лампите в мрежата последователно и измерваме както тока през тях, така и напрежението върху всяка от тях. По същата формула пресмятаме двете мощности при последователно свързване и чрез сравняване с резултатите от първоначалните измервания, намираме истинската процентната промяна на мощността на всяка лампа. За валидността на математичния модел съдим по това, доколко пресметнатото по този начин процентно намаление за всяка от лампите съвпада с намалението, пресметнато по формулите (8).

Изложеното дотук разкрива една възможност за реализиране в училище на **учебен изследователски проект**, целящ да демонстрира как се моделира сложна физична ситуация и да провери опитно доколко адекватен на действителността е избраният модел.

За осъществяване на проекта са необходими две лампи с различна мощност. Тъй като **в училище работа с мрежово напрежение не се допуска**, може да използвате 12-волтови автомобилни лампи – диапазонът на техните мощности е достатъчно широк (от няколко вата до няколко десетки вата).

Възловите моменти в работата са както следва:

1. Измерваме действителното напрежение  $U$  на източника (понижаващ мрежовото напрежение трансформатор, акумулатор и пр.).
2. Включваме поотделно лампите към източника и измерваме токовете  $I_1$  и  $I_2$  през всяка от тях.
3. По формулата  $P = IU$  пресмятаме действителната номинална мощност на всяка лампа.
4. По формулата  $R = U/I$  пресмятаме съпротивленията  $R_1$  и  $R_2$  на лампите в нормален работен режим. (Имайте предвид, че работната температура на лампите за ниски напрежения (особено на тези за фенерчета) са много по-ниски от споменатите по-горе 3000 K.)
5. По описания в началото начин пресмятаме нулевото приближение за мощностите на лампите при последователното им свързване.
6. За по-точно пресмятане на първата поправка, с омметър измерваме съпротивленията  $R_1^0$  и  $R_2^0$  на студените нишки (вместо доста неточното деление на  $R_1$  и  $R_2$  с 15, което използвахме преди).
7. С получените стойности за  $R_1$  и  $R_2$  и за  $R_1^0$  и  $R_2^0$  пресмятаме коефициентите  $p$  и  $q$  за всяка от лампите и съставяме уравненията, съответстващи на формули (3) и (5).
8. По изложения в текста начин съставяме квадратното уравнение за общия ток  $I$  през лампите, решаваме го, и с намерената стойност на  $I$  отново по (3) и (5) пресмятаме първо напрежението върху всяка лампа, а след това (от  $P = IU$ ) – и мощността ѝ.
9. За получаване на действителните стойности на мощностите при последователно свързване на лампите съставяме веригата и я включваме към източника. Измерваме както общия ток, така и напрежението върху всяка от лампите. С получените данни пресмятаме тяхната действителна мощност ( $P = IU$ ).

10. Сравняваме трите вида резултати: от пресмятанята в нулево приближение, от тези след първата поправка и от опитното измерване. Сравнението трябва да отговори на въпроса за годността на модела. Ако опитно получените резултати са по-близки до резултатите от нулевото приближение, отколкото до резултатите от първата поправка, трябва да обявим модела за негоден. Моделът следва да се смята успешен само, когато резултатите от пресмятанята с негова помощ са по-близки до опитно получените, отколкото тези от нулевото приближение.

Трябва да се има предвид, че даже моделът “да работи” добре в случая, това не означава, че той може да се прилага и при анализ на други ситуации. Представа за това, дали той ще може да се използва и в други случаи, можем да получим, ако снемем реалните волтамперни характеристики на лампите за напрежения от 0 V до 12 V (или до напрежението на използвания източник) и ги сравним с кривите от фиг. 1. Ако кривите са близки по вид, това ще бъде указание, че моделът притежава известна универсалност.

Снемането на реалните волтамперни характеристики на лампите дава възможност учебно-изследователският проект да се развие и по-нататък, като се премине към следваща, втора поправка на модела, в която съпротивлението на лампата се моделира не с линейна, а с квадратна функция на тока ( $R = aI^2 + bI + c$ ). Параметрите на първата поправка намерихме, като използвахме данните за двете крайни точки на всяка от волтамперни характеристики. Сега на определяне подлежат три параметъра ( $a$ ,  $b$  и  $c$ ) и допълнително уравнение за тях можем да получим като използваме стойности за  $I$  и  $U$  от избрана от нас точка от графиката на действителната волтамперна характеристика.

Друга възможност за развиване на проекта е да се повторят всички пресмятания и измервания с друга двойка лампи, чиито номинални стойности са различни от тези на първата двойка. След това всички резултати за процентното намаляване на мощностите им трябва да се сравнят с досегашните. Ако те съвпадат, в границите на точността на съвпадението може да се правят заключения относно универсалността на модела по отношение на самите лампи. (Не е изключено, ако в случая с първите две лампи моделът описва добре поведението им при последователно свързване, това да се дължи на някаква случайна пригодност на техните свойства.)

Проектът може да се развие и в други посоки, но и от изложеното дотук се вижда, че той дава представа за това как разсъждават физиците, когато се изправени пред реални проблеми.

Издавам благодарност на доц. В.Г. Иванов за времето, което отдели и за усилията, които положи за обсъждане на този материал, както и за съществените препоръки, които направи за неговото подобряване.

**Wagner W.S.** Temperature and Color of Incandescent Lamps, *The Physics Teacher*, **29**, 176 (1991)

#### **II ЛАМПИ**

Преди години, когато за улично осветление се използваха лампи с нажежаема нишка, можеше да се забележи следният ефект: лампите по една дълга улица не светваха едновременно, а последователно – първо най-близките до превключвателя и, с известно закъснение, разположените все по-далеч от него.

В обяснението на това явление участват три ефекта:

– зависимостта на съпротивлението на всяка лампа от температурата;

– топлинната инертност на нишката, т.е. наличието на известен, макар и кратък интервал време от момента на протичане на тока през нишката до момента, в който температурата ѝ става достатъчно висока, за да свети;

– наличието на крайно (макар и относително малко) съпротивление на съединителните проводници. (За сведение: алуминиев проводник с напречно сечение  $1,5 \text{ mm}^2$  и дължина 50 m има съпротивление около  $1 \Omega$ , т.е. от порядъка на съпротивлението на една мощна улична лампа, когато не свети.)

За по-голяма яснота на обяснението ще използваме метода на екстремните стойности: ще си представим, че съпротивлението на нишката на една лампа в студено състояние е много по-малко от съпротивлението на съединителните проводници между два улични стълба. При това положение можем да смятаме, че лампите “дават накъсо” съединителните проводници. Когато в мрежата се подаде напрежение, 220-те волта се разпределят по 110 V върху всеки от двата проводника, свързани с първата лампа, а напрежението върху нея (и останалите) е близко до нула. Токът обаче нагрива нишката на първата лампа, съпротивлението ѝ расте, а заедно с това – и напрежението върху нея. Когато то достигне 100 – 120 V, лампата започва да свети и когато достигне нормален режим на работа, само малка част от 220-те волта остават върху съединителните проводници. Същевременно нарастващото върху първата лампа напрежение се подвежда към втората лампа от поредицата и “историята” се повтаря: в началото тя “дава накъсо” двата проводника, чрез които е свързана с първата, но и нейното съпротивление започва да расте, постепенно напрежението ѝ достига стойност, при която и тя светва и т.н., и т.н. Разбира се, след като се установи окончателния режим, всяка следваща лампа ще свети малко по-слабо от предшестващата, защото поради съпротивлението на съединителните проводници напрежението върху лампите постепенно ще намалява.