

## Квантовата физика обяснява Нютоновите закони за движение Дж. Огборн, Е. Тейлър

### Обяснение

Обикновено квантовата физика и поведението на такива квантови обекти като електроните или фотоните се представят като странни и мистериозни. И наистина, по думите на Ричард Файнман, електроните “се държат по своя неподражаем начин ... начин, който не прилича на нищо, което сте виждали преди това.”<sup>1</sup>

Същият Ричард Файнман бе обаче онзи, който измисли начин за описание на квантовото поведение, отличаващ се с удивителна простота и яснота<sup>2</sup>. Оттогава вече няма място за онази мистериозност, която произтича от всеки опит да се опише квантовото поведение като някакво странно приближение на класическото поведение на вълните и на частиците. Вместо това ние обърнахме обясненията наопаки: ние *тръгваме от* квантовото поведение и показваме как то *обяснява* класическото поведение.

На първо време от това може да почувствате известно неудобство. Защо да обясняваме обичайни неща с нещо необичайно? Но това е пътят на *всяко* обяснение. Обяснения, които не се опират на нещо различно от това, което обясняват, не обясняват нищо!

В тази статия ние показваме, че квантовата механика всъщност *обяснява* защо Нютоновите закони за движение предсказват успешно движението на футболната топка и на спътниците. За Нютон фундаменталните закони са аксиоми – отправна точка. За нас законите на Нютон са *следствия* от фундаменталните закони на квантовия свят.

### Принципът на Ферма: източник на ключовата квантова идея

Геометричната оптика предсказва как светлинните лъчи формират образи. Примери за това са образите, получавани чрез отражение, чрез очила или обективите на фотокамери. Цялата геометрична оптика – всяка траектория на всеки светлинен лъч – може да се предскажат с помощта на един единствен принцип: *Измежду различните траектории, свързващи точката на излъчване и точката на приемане, светлината избира онази, по която времето за движение е най-кратко*. Това твърдение се нарича *принцип на Ферма* – на името на французина Пиер Ферма (1601 – 1665).

Прост пример, илюстриращ принципа на Ферма, е законът за отражение: ъгълът на падане е равен на ъгъла на отражение. Принципът на Ферма обяснява също действието на лещите: различните лъчи, свързващи източника и образа преминават през части от лещата с различни дебелини, така че времената, за които светлината изминава пътя между двете точки, *са еднакви*. Принципът на Ферма обяснява действието на вдлъбнатото огледало на един телескоп: кривината на огледалото е такава, че на всеки лъч му е необходимо *едно и също време*, за да достигне до фокуса.

Съвременниците на Ферма имали едно основно възражение срещу принципа му, съдържащо се в прозорливия въпрос: “Как би могла светлината предварително да знае кой път е най-бързият?”. Отговорът изисква да се отиде твърде далеч и бе окончателно намерен едва през двадесетия век. Ето ключовата идея: *Между излъчването и приемането светлината проучва всички възможни траектории*. По-късно ние ще открием подобно правило при движението на такива атомни частици, каквито са

<sup>1</sup> Feynman R. P. *The Character of Physical Law*, Cambridge, MA: MIT Press, 1965, с. 128.

<sup>2</sup> Feynman R. P. *QED: The Strange Story of Light and Matter*, London, Penguin, 1985.

Интересуващият се читател може да потърси руския превод:

Р. Фейнман КЭД: странная теория света и вещества, Библиотечка “Квант”, вып. 66; Москва, “Наука”, Гл. ред. Физико-математической литературы, 1988. (Бел. прев.)

електроните: една частица проучва *всички възможни пътища* между източника и детектора. Именно това е основната идея във формулировката на квантовата механика, развита от Ричард Файнман (1985).

Идеята за проучването на всички възможни траектории повдига два основни въпроса: (1) какво *означава* да проучва всички траектории? (2) Как е възможно “проучването на всички траектории” да се съгласува с факта, че телата около нас (напр. футболните топки) и светлинните лъчи следват една единствена траектория? Да се отговори на тези въпроси означава да се разбере връзката между квантовата механика и Нютоновата механика.

### **Какво означава Проучва всички пътища?**

Идеята за проучване на всички пътища води началото си от идеята на Християн Хюйгенс за вторичните вълни (1690). Хюйгенс обяснява разпространението на вълновия фронт с възникването на вторични сферични вълни, излъчени от всяка точка, до която е достигнал фронтът в даден момент. Той показва, че тези вторични вълни определят положението на вълновия фронт в един по-късен момент; във всички останали точки частите на вторичните вълни се унищожават взаимно. През 1819 г. френският инженер по пътнo и мостово строителство Августин Френел поставя тази идея на солидна математическа основа и успява да обясни в детайли дифракцията и интерференцията на светлината.

През 40-те години на 20. век Ричард Файнман (следвайки едно загатване на Дирак) приспособява идеята на Хюйгенс, за да изгради поновому основите на квантовата физика, като започва с кванта на светлината: *фотона*. Най-простата команда от три думи на Природата към фотона е: *Проучвай всички траектории!*; опитай всеки възможен път от източника до детектора. Всяка възможна траектория е свързана с определена промяна на фазата. Човек може да си представи, че всеки фотон притежава хронометър, чиято стрелка се върти с класическата честота на светлината. Въртенето започва в момента на излъчване на фотона и спира в момента, когато той достигне детектора. Крайното положение на стрелката определя по една “стрелка” за всяка траектория.

Фотонът проучва всички траектории, които свързват събитието излъчване със събитието регистриране. За да се намери общата резултантна квантова амплитуда за събитието (резултантната стрелка), всички стрелки за възможните траектории следва да се съберат векторно (т. е. да се вземат предвид техните фази, точно както трябва да се сумират вторичните вълни). Тази резултантна стрелка описва излъчването на фотона в дадена точка в определен момент и неговата регистрация на друго място и по друго време. (Има също така правила, по които дължината на стрелката се променя в зависимост от разстоянието, така интензитетът на светлината да се подчинява на закона за обратната пропорционалност на квадрата от разстоянието. За опростяване ние разглеждаме само случаи, в които разстоянието се изменя малко, така че промените в дължината на стрелката може да се пренебрегнат.)

Резултантната стрелка определя вероятността за едно събитие. Вероятността е равна на квадрата от дължината на стрелката (нормирана по подходящ начин). По такъв начин се възстановява класическият резултат, че интензитетът е пропорционален на квадрата от амплитудата на вълната.

Така ние скицирахме простото и ясно Файнманово описание на “квантовото поведение” на един фотон. По същество той открадва математическия апарат на вторичните вълни на Хюйгенс, без да предполага наличието на каквито и да е вълни. За Хюйгенс вторичните вълни се разпространяват навсякъде, защото така е при вълните.

За Файнман фотонът “се разпространява” навсякъде, защото фотонът наистина прави това.

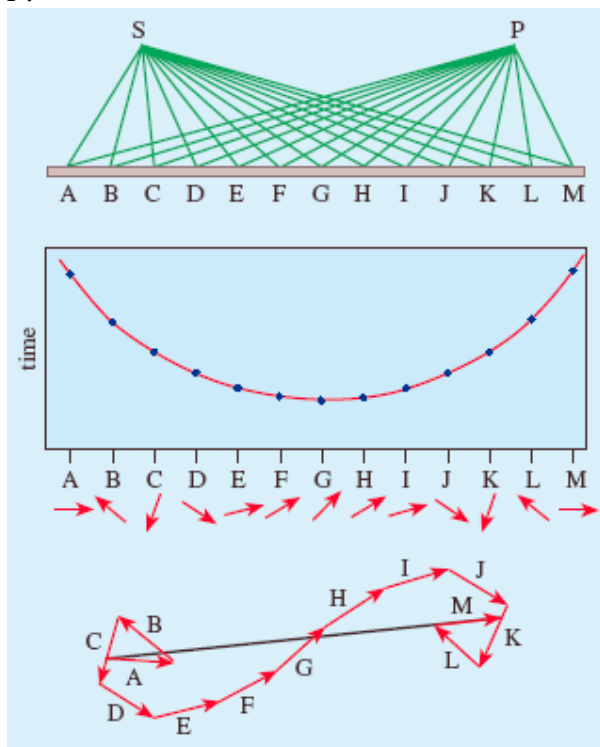
### Мостът от квантовата към класическата физика

Следващият въпрос е: как е възможно командата на Природата *Проучи всички траектории!* да се съвмести с всекидневното наблюдение, че един обект като футболна топка или светлинен лъч следва винаги *една единствена траектория*?

Краткият отговор на този въпрос е *Той не следва една единствена траектория*. Няма ясна граница между частиците, които проучват много траектории и заобикалящите ни тела. Между другото, за какво си мислите вие, когато употребявате изразът *заобикалящи ни тела*? Огромен брой учени заобикалящи ни изучават тела, чиито маси и степен на структурна сложност са най-различни. Един съвременен пример е наблюдаваната интерференция на голямата фулеренова молекула въглерод-70, чиято маса е равна приблизително на масата на 840 протона.

Всъщност, квантовото поведение преминава постепенно в класическо поведение. В тази и следващата част ще покажем как да предсказваме областта на този преход за различен вид наблюдения.

За случая на фотон, отразен от плоско огледало, ключовата идея е илюстрирана на фиг. 1. Огледалото е мислено разделено на малки части, означени с буквите от *A* до *M*. Малките стрелки, показани под всяка част в средата на фигурата, съответстват на положението на стрелката на хронометъра, което тя има след като отразеният от съответната част лъч достигне т. *P*. В долната част на фигурата тези малки стрелки са събрани векторно, за да се предскаже резултантната големина на стрелката в т. *P*. Квадратът от дължината на тази стрелка определя вероятността фотонът да попадне в т. *P*.



Фиг. 1.: Как се оценява приносът на лъчите, излизащи от източника *S* и достигащи точка *P*, отразявайки се от различни участъци на огледалото *ABC ... LM*.

Множество траектории допринасят за отражението от едно огледало. В горната част на фигурата са показани всички траектории, по които светлината би

могла да стигне от източника в т.  $S$  до т.  $P$ . В средната част на фигурата е показана графика на времето, необходимо на един фотон, за да измине пътя по всяка от траекториите и да попадне във фотумножителя. Под графиката е показана посоката на стрелката на хронометъра, който съпровожда фотона по различните траектории, в момента на пристигането му в т.  $P$ . В най-долната част на фигурата е показан резултатът от векторно сумиране на всички стрелки. Очевидно е, че най-голям принос към формиране дължината на резултантната стрелка имат стрелките от  $E$  до  $I$ , чиито посоки почти съвпадат, тъй като времената за изминаване на техните пътища са почти еднакви и са близки до минималното време за изминаване на пътя от т.  $S$  до огледалото и оттам до т.  $P$ . Ето защо с голяма точност може да се каже, че светлината се движи по траекторията, която изминава за най-кратко време.

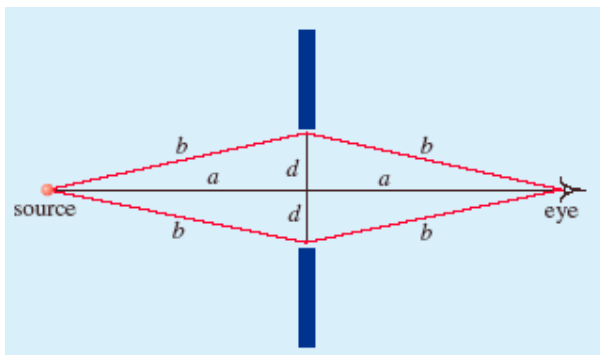
Както се вижда от коментара под фигурата, най-голям принос за дължината на резултантната стрелка имат стрелките, идващи от частите на огледалото, намиращи се между означените с буквите  $E$  и  $I$ , тъй като техните посоки са много близки. Стрелките, съответстващи на лъчи, идващи от краищата на огледалото, имат най-различни посоки, така че техният принос в общата сума не е голям. Даже да удължим огледалото в двете посоки, приносите към резултантната стрелка от отраженията от тези допълнителни части ще бъдат нищожни. Защо? Защото те ще сменят посоките си дори по-бързо, отколкото стрелките  $ABC$  или  $KLM$ , показани в двата края на резултантната стрелка на най-долната част на фигурата. Голямата част от резултантната стрелка се определя от малко на брой стрелки, които са “строени в редичка” и почти нищо не се дължи на онези, които са завъртени в други посоки.

Сега вие виждате как заповедта *Пробвай всички траектории!* води до тесен сноп от траектории, които дават значителен принос към резултантната стрелка в т.  $P$ . И този тесен сноп трябва да лежи близо до траекторията на минималното време за преминаване, защото именно около тази траектория това време, а заедно с него и фазата, се променят слабо при преход между съседни траектории.

Ето го и отговорът на критиците на Хюйгенс. Те питаха “Как е възможно светлината да знае предварително коя траектория е най-бърза?” Отговорът е: фотонът *не* знае предварително: той пробва всички траектории. Обаче, *само* траекториите, които са най-близки до най-бързата траектория, дават забележим принос към резултантната стрелка и следователно – към квадрата на нейната големина, т. е. към вероятността фотонът да попадне в дадена точка  $P$ .

Този отговор представлява нещо повече от един съкрушителен удар. Той отива по-нататък и дава възможност да се оцени точността на принципа на Ферма. Колко широк е снопът от траектории около единствената класическа траектория? За да получим най-широкия възможен сноп, който дава принос към резултантната стрелка, намираме онези стрелки, които сочат в приблизително противоположната посока на централните стрелки  $G$  и  $H$ . На фиг. 1 това са стрелките  $C$  и  $K$ . По такъв начин нашият критерий за това, кои стрелки трябва да се отчитат при получаване на резултиращата стрелка, е следният:

Намерете малките стрелки, чиито посоки са най-близки до резултантната стрелка. Да ги наречем централни стрелки. Снопът от стрелки около централните, които допринасят най-значително към резултантната стрелка се състои от онези, които са завъртени на по-малко от половин оборот спрямо посоката на централните стрелки.



Фиг. 2.: *Екстремните траектории през процепа (не в мащаб).*

Като пример нека наблюдаваме източник на светлина през процепа (фиг. 2). Да ограничим безкрайно голямото число възможни траектории между източника и окото до онези, състоящи се от два прави сегмента с равни дължини. Колко широк следва да бъде процепа (т. е. колко трябва да бъде  $2d$  на фиг. 2), така че в окото да попадне максимално количество светлина?

Ние можем да пресметнем отговора бързо. От питагоровата теорема следва, че  $a^2 + d^2 = b^2$ , или:

$$d^2 = b^2 - a^2 = (b - a)(b + a) \approx 2a(b - a).$$

Последният резултат получихме, предполагайки, че  $a$  и  $b$  имат приблизително равни дължини, така че замяната на  $a + b$  с  $2a$  води до само няколко процентна грешка. Ще проверим това предположение след заместване на числените стойности.

Нашият критерий е, че разликата  $2(b - a)$  между дължината на траекторията, която минава до ръба на процепа, и дължината на траекторията през средата на процепа, трябва да бъде равна на половин дължина на вълната, т. е. на разстоянието, за което стрелката на хронометъра прави половин оборот. Нека разстоянията от процепа до източника и до окото да бъдат по един метър, т. е.  $a = 1$  m и нека използваме зелена светлина, за която  $\lambda = 600$  nm =  $60 \cdot 10^{-8}$  m. Тогава

$$(1) \quad d^2 \approx a \frac{\lambda}{2} = 1.30 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2,$$

така че  $d$  е около  $5 \cdot 10^{-4}$  m. Следователно  $2d$ , широчината на процепа, е около 1 милиметър. (Проверете:  $b^2 = a^2 + d^2 = (1 + 3 \cdot 10^{-7}) \text{ m}^2$ , така че нашето предположение, че  $a + b \approx 2a$  се оправдава.)

### **И електроните се държат по същия начин!**

При анализа на отражението на фотона и праволинейното разпространение предположихме, че стрелката на фотонния хронометър се върти с честота, равна на честота  $f$  на класическата вълна. Ако трябва да направим подобен анализ за един електрон или за друга “обикновена” субмикроскопична частица, ние трябва да знаем съответната честота на въртене на неговия квантов хронометър.

С този въпрос ние достигнахме дъното: няма нищо по-фундаментално, въз основа на което да отговорим на този въпрос, освен просто да дадем отговора, лежащ в основата на нерелативистичната квантова механика. Този отговор представлява новата Файнманова основа на квантовата физика, и чрез който след това квантовата механика обяснява Нютоновата механика.

Ето го и този фундаментален отговор: За една “обикновена” частица, т. е. частица с маса, стрелката на квантовия хронометър се върти с честота:

$$(2) \quad f = \frac{L}{h} = \frac{K - U}{h} \quad (\text{нерелативистични частици}).$$

В това равенство  $h$  е прочутият квант на действието, известен като константа на Планк,  $L$  е лагранжианът, който за частици, движещи се с нерелативистични скорости е равен на разликата между кинетичната енергия  $K$  и потенциалната енергия  $U$  на частицата.

Необяснимо ли е това? *Разбира се*, необяснимо е. Помнете: “Обяснение, което не се опира на нещо различно от това, което трябва да се обясни, не обяснява нищо!” Ако уравнение (2) не беше необяснимо, още древните биха го открили. Древните са били точно толкова умни, колкото сме и ние, но те не са преживявали дългото, бавно развитие на физичната теория, което е необходимо, за да се стигне до това уравнение. Уравнение (2) е ядрото на обясненията за това как действа микросвета: приемоте го и го възхвалявайте!

За свободен електрон уравнение (2) се редуцира на:

$$(3) \quad f = \frac{K}{h} \quad (\text{нерелативистична свободна частица}).$$

Това много прилича на съответното уравнение за фотоните:

$$f = \frac{E}{h} \quad (\text{фотон})$$

(макар че приликата не доказва нищо, разбира се).

След като сме приели за основа на обясненията уравнение (2), целият анализ, направен по-горе по отношение на фотона, може да бъде проведен за описание на поведението на електрона. Ние можем да зададем въпроса “При каква скорост на движение електронът има същата честота, както зелената светлина?” . Честотата на

зелената светлина е  $f = \frac{c}{\lambda} = 0,5 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$  . От уравнение (3) вие можете да пресметнете,

че скоростта  $v$  на такъв електрон е около една десета част от скоростта на светлината във вакуум, т. е. почти на границата между нерелативистичните и релативистичните явления. Енергията на този електрон е приблизително  $3 \cdot 10^{-16} \text{ J}$  или  $2000 \text{ eV}$  и се придобива при средни по големина ускоряващи напрежения. За протон или водороден атом, чиито маси са около 2000 пъти по-големи и скоростта е по-малка с квадратен корен от тази величина пъти, т. е. около  $1/45$  от съответната скорост на електрона. За молекулата на споменатия по-горе въглерод-70 скоростта, при която честотата е равна на тази на зелената светлина, е по-малка от един километър за секунда.

От уравнение (3) следва, че с нарастване на масата на частиците расте тяхната квантова честота, а ефективната дължина на вълната намалява. Поради това, че числената стойност на кванта на действие  $h$  е извънредно малка, за частици с нарастващи маси снопът от траектории, подобни на тези от фиг. 2, се свива бързо около единствената траектория, която ние наблюдаваме във всекидневието.

Възможно е историята *Пробвай всички траектории!* да се сравни с вълновата история и да се идентифицира “дължината на вълната” за един електрон (вж. Приложението). Резултатът представлява добре познатата формула на де Бройл:

$$(4) \quad \lambda = \frac{h}{mv} .$$

Това ни позволява да оценим квантовата широчина на траекторията на една футболна топка. Когато топката с маса от  $0,5 \text{ kg}$  се движи по права линия със скорост от  $10 \text{ m/s}$ , от уравнение (4) за дължината на вълната намираме:

$$\lambda = \frac{h}{mv} \approx \frac{7 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}}{0,5 \text{ kg} \cdot 10 \text{ ms}^{-1}} \approx 10^{-34} \text{ m} .$$

Колко широк проце́п е необходим за праволинейна траектория (фиг.2)? За траектория с дължина  $2a = 20 \text{ m}$  равенство (1) дава:

$$d^2 \approx 10^{-33} \text{ m}^2 ,$$

така че ефективната широчина на траекторията, дължаща се на квантовите ефекти, е:  
 $2d \sim 10^{-16} \text{ m}.$

С други думи, центърът на футболната топка следва по същество една единствена траектория, както свидетелства Нютон и всекидневният ни опит.

### **“Изпробвай всички траектории” и принципът на най-малкото действие**

Уравнение (2) е достатъчно важно, така че си струва да го запишем отново:

$$f = \frac{L}{h} = \frac{K - U}{h}.$$

То определя скоростта на въртене на квантовата стрелка по протежение на траекторията. Следователно сумата (интегралът) на величините  $(L/h) dt$  по протежение на траекторията дава общия брой обороти по тази траектория. Интегралът от  $Ldt$  има свое име и дълга история. Ирландският математик Уилям Роуан Хамилтон (1805 – 1865) формулира този интеграл и му дава името *действие*. Той показва, че при движение за фиксиран интервал време по класическата траектория, която свързва две фиксирани в пространството точки, действието има минимална (или поне стационарна) стойност. Хамилтон нарича това твърдение *принцип на вариране на действието*. Днес той е известен най-често като *принцип на най-малкото действие*, при което не се отчита факта, че понякога в седловидна точка действието е стационарно. Действието по протежение на една траектория е просто сума от множество приноси, всеки от които има вида:

$$Ldt = (K - U)dt.$$

Решаващото и дълбоко откритие на Файнман е, че квантовата механика може да се базира върху постулата, че разделеният с кванта на действие  $h$  лагранжиан  $L$  представлява скоростта на въртене на квантовата стрелка. Следователно ние тръгваме от фундаменталната квантова команда *Пробвай всички траектории!* И тогава стигаме до класическата граница, в която всички траектории се свиват около една траектория и квантовата команда се трансформира в *Следвай траекторията на най-малкото действие!*

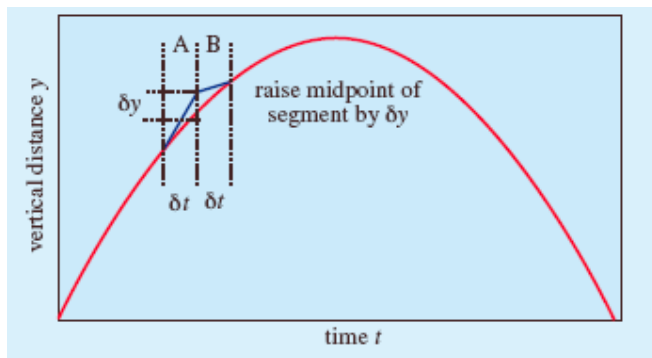
### **Най-малкото действие обяснява законите на Нютон**

Ние завършваме прехода към Нютоновата механика, като показваме, по-скоро за илюстрация, отколкото като доказателство, че принципът на най-малкото действие води директно до втория закон на Нютон  $F = dp/dt$ . За целта използваме простия подход, описан от Хенк и др.<sup>3</sup>. Разглеждаме специалния случай на едномерно движение, при което потенциалната енергия е линейна функция на положението. За конкретност може да си мислите за вертикално издигане и свободно падане на футболна топка във вертикално  $y$ -направление близо до земната повърхност. В този случай потенциалната енергия  $U(y)$  се описва с израза  $mgh$  и лагранжианът е:

$$L = K - U = \frac{1}{2}mv^2 - mgh,$$

където  $v$  е скоростта във вертикално направление.

<sup>3</sup> Hanc J., Tulcja S., Hankova M. Simple derivation of Newtonian mechanics from the principle of least action, *Am. J. Phys.*, **74**, 386 – 91, 2003.



Фиг. 3.: Вариране на мировата линия.

Погледнете сега фиг. 3, на която е показано вертикалното положение на центъра на издигащата се и падаща футболна топка като функция на времето<sup>4</sup>. Тази крива, изобразяваща положението като функция от времето, се нарича *мирова линия*. Тази линия се простира от началните точка и момент (началното събитие на хвърляне на топката) до крайната точка на падането. Да предположим, че показаната мирова линия е онази, която реално се следва от топката. Това означава, че стойността на действието е минимална.

Нека сега да използваме една научна хватка, за да тръшнем проблема на тепиха с едно хвърляне през глава: Ако по реалната мирова линия действието наистина има минимална в сравнение с всички съседни мирови линии стойност, тогава то е минимално по *всяка малка част* от тази мирова линия, в сравнение със съседните ѝ малки части от другите линии. “В противния случай вие бихте могли просто да замените дадената малка част от траекторията с другата, по-която действието е по-малко, и така да направите целия интеграл малко по-малък.”<sup>5</sup> По такъв начин единственото, което следва да направим, е да се убедим, че действието е наистина минимално по коя да е безкрайно малка част от мировата линия.

Да вземем малък участък от мировата линия и да варираме височината на средната му точка, като я увеличим с малката величина  $\delta y$ . При това ние налагаме условието при това преместване да не се променя действието по участъка (крайните точки са фиксирани!).

Да разгледаме промяната на действието върху всяка от двете части  $A$  и  $B$  на участъка, които се изминават за равни времена  $\delta t$ . Тази промяна е:

$$\delta \mathcal{S}_{AB} = \delta \mathcal{S}_A + \delta \mathcal{S}_B = (\delta L_A + \delta L_B) \delta t.$$

Тъй като  $\delta t$  е фиксирано, единствените промени, които имат значение в случая са промените  $\delta L_A$  и  $\delta L_B$ . Тези промени са съответно:

$$\delta L_A = \delta(K_A - U_A) \quad \delta L_B = \delta(K_B - U_B).$$

Като прегрупираме събираемите за сумата получаваме:

$$(5) \quad \delta(L_A + L_B) = \delta(K_A + K_B) - \delta(U_A + U_B).$$

Остава да видим как се променят двете суми  $K_A + K_B$  и  $U_A + U_B$  при отместване на участъка от мировата линия с  $\delta y$ . Ние ще изискваме техните промени да бъдат равни, така че общата промяна на действието, което е тяхна разлика, умножена с  $\delta t$  да бъде нула, защото знаем, че действието не се променя при подобни отмествания на мировата линия.

<sup>4</sup> Обърнете внимание: изобразената крива, въпреки че е парабола, не представлява траектория на движението на тяло, хвърлено под ъгъл спрямо хоризонта! В случая се разглежда движение на тяло, хвърлено вертикално нагоре и по абсцисата се нанася не отместването  $x$ , а времето  $t$ . (Бел. прев.)

<sup>5</sup> Feynman R. P. *The Feynman Lectures on Physics*, vol. II, New York: Addison Wesley, 1964, с. 18.

Да вземем първо промяната на потенциалната енергия. Както се вижда от фиг. 3, при повдигане на средната точка от участъка с  $\delta y$ , средната промяна на  $y$  по всяка от двете части  $A$  и  $B$  е  $\delta y/2$ . Тъй като по всяка от двете части топката е по-високо с  $\delta y/2$ , общата промяна на потенциалната енергия е:

$$(6) \quad \delta(U_A + U_B) = mg \delta y.$$

Така ние получихме втория член в равенство (5) – един относително лек първи етап от борбата.

За получаване на втория член – промяната на сумата от кинетичните енергии, е нужно да проявим малко по-голяма ловкост. Ефектът от повдигането с  $\delta y$  на центъра на участъка от мировата линия увеличава наклона на частта  $A$  и го *намалява* за частта  $B$  (помнете, че крайните точки са фиксирани). Но наклонът на мировата линия (т. е. графиката на  $y$  като функция на  $t$ ) представлява точно вертикалната скорост  $v$  на топката. А тези промени, както се вижда от фиг. 3 са равни и противоположни по знак. На участъците  $A$  и  $B$  промените на скоростта са съответно:

$$\delta v_A = \frac{\delta y}{\delta t} \quad \delta v_B = -\frac{\delta y}{\delta t}.$$

Това, което ни интересува обаче, е промяната на кинетичната енергия. Тъй като

$$K = \frac{1}{2}mv^2, \text{ тази промяна е:}$$

$$\delta K = mv \delta v = p \delta v,$$

където  $p = mv$  е импулсът на тялото. По такъв начин за сумата от промените на кинетичната енергия получаваме:

$$\delta(K_A + K_B) = p_A \delta v_A + p_B \delta v_B,$$

или, като си спомним, че промените на скоростта са равни и противоположни по знак:

$$\delta(K_A + K_B) = (p_A - p_B) \frac{\delta y}{\delta t}.$$

Промяната на импулса от частта  $A$  към частта  $B$  е  $\delta p = p_B - p_A$ , така че общата промяна на кинетичната енергия, необходимо за равенство (5), е просто:

$$(7) \quad \delta(K_A + K_B) = -\frac{\delta p}{\delta t} \delta y.$$

А сега финалното мятане върху тепиха! Равенство (5) казва, че ако промените на кинетичната енергия (от равенство (7)) са равни на промените на потенциалната енергия (от равенство (6)), тогава тяхната разлика е нула и действието не се променя (при фиксирано  $\delta t$ ). Следователно ние трябва да приравним двете, за да намерим условието за неизменност на действието:

$$-\frac{\delta p}{\delta t} \delta y = mg \delta y.$$

И така, действието остава непроменено, ако:

$$\frac{\delta p}{\delta t} = -mg.$$

В разглеждания частен случай  $mg$  е насочената надолу (в отрицателна посока) сила на тежестта. В граничния случай на безкрайно малки участъци този резултат става:

$$F = \frac{dp}{dt} \quad \text{вторият закон на Нютон.}$$

Всичко е свършено: проблемът лежи в краката ни! Силата *трябва* да бъде равна на скоростта на промяна на импулса. Законът на Нютон е *следствие* от принципа на най-малкото действие, който, от своя страна, е следствие от квантовата физика.

Какво може да се каже за случаите, в които потенциалната енергия е по-сложна функция на мястото? В началото ще отбележим, че *всяка* функция, която описва реален потенциал, при *всяко* малко преместване може ефективно да се разглежда като линейна. Чрез малка промяна на направения по-горе извод може да се покаже, че в общия случай:

$$-\frac{dU}{dy} = \frac{dp_y}{dt},$$

където  $-dU/dy$  е по-общият израз за сила и сме добавили индекс  $y$  към импулса, защото движението се извършва по направление на оста  $Oy$ . За тримерно движение към това трябва да се добавят още две равенства с подобна форма: едно за  $x$ -направлението и една за  $z$ -направлението (и, за да бъдем технически коректни, производните на  $U$  стават частни производни по отношение на съответната координата).

“Аз бях казал, че ние извеждаме законите на Нютон. Това не е съвсем вярно, защото законите на Нютон включват още и неконсервативни сили, подобни на триенето. Нютон казва, че *та* е равно на  $F$ , каквато и да е силата. Принципет на най-малкото действие обаче е валиден само за консервативни системи – когато всички сили може да се получат от потенциална функция.” (вж. пред. препратка). Триенето води до дисипация на по-високо организираната механична енергия в по-ниско организирана вътрешна енергия; ние обаче нямаме намерение в тази статия да изясняваме термодинамиката !

### Класически или квантово?

Нека се отървем от алгебрата и опитаме да обясним как всичко това работи на фундаментално равнище. Законите на Нютон фиксират траекторията така, че промените на фазата, предизвикани от промени на кинетичната енергия, компенсират точно онези от промяна на потенциалната енергия. Това е съвременният квантово-полев възглед за силите: силите променят фазите на квантовите амплитуди. Ние видяхме тук как това става в проста форма. Онова, което Нютоновата физика разглежда като причина и следствие (силата определя ускорението), квантовият възглед за “множеството траектории” третира като баланс между промените на фазата, предизвикани от промени на кинетичната и на потенциалната енергия.

По този начин ние изминахме целия път от най-дълбокия принцип на нерелативистичната квантова механика – *Изпробвай всички пътища!* – до най-дълбокия принцип на класическата механика за консервативни системи – *Следвай траекторията на най-малкото действие!* А оттук – и до класическата механика, преподавана във всяка гимназия. Старите истини на класическия свят са пряко следствие от новите истини на квантовия свят. Нещо повече – сега ние сме в състояние да оценим границите на точността на старите класически истини.

### Полуистината, която изказахме

В тази статия ние преднамерено наблегнахме върху една важна полуистина – че всеки квантов обект (фотон, електрон и пр.) се подчинява на една и съща основна команда *Пробвай всичко!* Но ако група електрони се държат точно като група фотони, тогава не би могъл да съществува нито един атом, нито нашата Вселена, нашата Галактика, нашата Земя, нито ние, които пишем и четем тази статия.

Полуистината *Пробвай всичко!* служи добре, когато трябва да се опише отделен фотон или отделен електрон. В този смисъл тя е фундаментална. Но действието на лазерите и структурата на атомите зависи съответно от сътрудничеството между фотоните и сътрудничеството между електроните. И сътрудничеството е много различно между електроните и между фотоните. Фотоните принадлежат на групата на

бозоните а електроните – към групата на *фермионите*. Бозоните се стремят да заемат едно и също състояние; фермионите избягват да заемат еднакви състояния.

Ако две тъждествени частици попаднат в едно и също крайно състояние, същият резултат трябва да се получи и при размяна на частиците – това е следствие от идентичността им. Командата *Пробвай всичко!* трябва да включва и команда “*Събери стрелките и за двата процеса!*”. Ако частиците са бозони, двете стрелки са еднакви и просто се събират, като амплитудата се удвоява (а вероятността се увеличава четири пъти). Ние обобщаваме, като казваме, че фотоните “предпочитат да се намират в едно и също състояние”. Това е причината, поради която работят лазерите (а също така и причината, поради която ние възприемаме потоците от фотони с радиочестоти като че ли са радиовълни). Но ако частиците са фермиони, стрелките се комбинират с *противоположни* фази. В този случай амплитудата на вероятността двете частици да бъдат в едно и също състояние е *нула*. Ето защо електроните се подчиняват на принципа на Паули, защо електроните в един атом се намират в различни състояния. И структурата на нашия свят, и нашите наблюдения върху него зависят от тази разлика между груповото поведение на фотоните и груповото поведение на електроните.

### Приложение. Дължина на вълната на де Бройл

Ще покажем, че фундаменталният израз  $L/h$ , който описва скоростта на въртене на квантовата стрелка по време на движение на частицата по нейната траектория, в подходящо приближение води до формулата на де Бройл  $\lambda = h/mv$ .

Да разгледаме свободна частица, за която потенциалната енергия е  $U = 0$ , а

$$L = K = \frac{1}{2}mv^2:$$

$$\text{Скоростта на въртене на стрелката} = \frac{mv^2}{2h}.$$

Броят  $n$  на оборотите, които стрелката прави за време  $t$ , е:

$$n = \frac{mv^2}{2h}t.$$

Дължината на вълната е равна на разстоянието  $x$ , на което стрелката прави пълен оборот. Следователно ние трябва да изразим броя на оборотите чрез  $x$ , вместо чрез  $v$  и  $t$ . З целта използваме връзката  $v = x/t$  и получаваме:

$$n = \frac{mx^2}{2ht}.$$

Ако  $x$  е голямо и нарасне с малката величина  $\delta x$ , като пренебрегнем величини от порядъка на  $\delta x^2$ , за нарастването на броя на оборотите получаваме:

$$\delta n = \frac{mx\delta x}{ht}.$$

Сега въвеждаме дължината на вълната. Ако  $\lambda \ll x$ , че нарастването на броя на оборотите е  $\delta n = 1$ , когато  $\delta x = \lambda$ . Така получаваме:

$$1 = \frac{m\lambda}{ht}.$$

Като отчетем, че  $v = x/t$  и преобразуваме израза, получаваме формулата на де Бройл:

$$\lambda = \frac{h}{mv}.$$