3rd National Congress on Physical Sciences, 29 Sep. – 2 Oct. 2016, Sofia
Section: Theoretical Physics

Единственост на статичните решения на уравненията на Айнщайн-Максуел, съдържащи фотонна сфера

Стойчо Язаджиев, **Боян Лазов**

Катедра по теоретична физика, Физически факултет, Софийски университет "Св. Климент Охридски", София 1164, България

Abstract. Разглеждаме теорема за единственост на статичното и асимптотически плоско пространство-време на Айнщайн-Максуел с фотонна сфера P^3. За тази цел първо модифицираме дефиницията на фотонна сфера за пространство-време с електричен заряд, като добавяме свойството, че едно-формата $\iota_\xi F$ е нормална към фотонната сфера. След това фиксираме магнитния заряд да е равен на нула и предполагаме, че lapse функцията регулярно разслоява пространство-времето извън фотонната сфера. Като помощен (и сам по себе си важен) резултат доказваме, че P^3 има константни средна и скаларна кривина. След това доказваме основната теорема за единственост. Тя гласи, че статично и асимптотически плоско пространство-време на Айнщайн-Максуел с неекстремална фотонна сфера е изометрично на пространство-времето на Райснер-Нордстрьом с маса M и електричен заряд Q, удовлетворяващи $Q^2/M^2 \leq 9/8$.

1 Увод

Фотонните сфери са добре известно предсказание на Общата теория на Относителността (ОТО) и обобщените теории на гравитацията. Те са области от пространство-време, където светлината може да бъде ограничена в затворена орбита. Тясно свързани са с гравитационните лещи и следователно играят съществена роля за астрономията и астрофизиката.

Фотонните сфери са обекти с много специфични характеристики (константни средна и скаларна кривини, константна повърхностна гравитация и за статично пространство-време – константна lapse функция), по които си приличат с хоризонтите на събитията. Това естествено води до въпроса, дали фотонните сфери могат да бъдат използвани за класификация на решенията на дадена гравитационна теория. Това беше направено за статичните и асимптотически плоски решения на вакуумните уравнения на Айнщайн без и със скаларно поле. Като цяло, този проблем за единственост е по-сложен, отколкото случаят, в който се използва хоризонтът на събитията.

Ще разгледаме статични и асимптотически плоски вакуумни решения на системата уравнения на Айнщайн-Максуел, съдържащи фотонна сфера, и ще докажем, че са изометрични на решението на Райснер-Нордстрьом с маса M и заряд Q при условие, че $M^2 \neq Q^2$ и $Q^2/M^2 \leq 9/8$.

2 Предварителни дефиниции и равенства

Разглеждаме гравитация на Айнщайн-Максуел, описвана от следното действие:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathfrak{L}^4} \mathrm{d}^4 x \sqrt{-\mathfrak{g}} (\mathfrak{R} - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}), \tag{1}$$

където пространствено-времевото многообразие е означено с $(\mathfrak{L}^4, \mathfrak{g})$, $\mathfrak{R}$ е скаларната кривина на Ричи и F е тензорът на Максуел.

Разглеждаме статично пространство-време, дефинирано както в [1], и дефинираме статичност на полето на Максуел,

$$\mathcal{L}_\xi F = 0, \tag{2}$$

където $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$ е времеподобния Килингов вектор. Ще се съсредоточим върху изцяло електричния случай, за който $\iota_\xi \star F = 0$.

Пространство-времето, което разглеждаме, е и асимптотически плоско. Асимптотически плоско пространство-време се дефинира по обичайния начин [1]. Асимптотичното развитие на полетата се дава от следното:

$$g = \delta + O(r^{-1}), \;\; N = 1 - \frac{M}{r} + O(r^{-2}), \;\; F = -\frac{Q}{r^2} dt \wedge dr + O(r^{-3}) \tag{3}$$

спрямо стандартната радиална координата върху $\mathbb{R}^3$. M и Q са съответно масата и електричният заряд.

Освен това трябва да дефинираме фотонна повърхнина и фотонна сфера.

Definiton 2.1. *Вложена времеподобна хиперповърхнина* $(P^3, p) \hookrightarrow (\mathfrak{L}^4, \mathfrak{g})$ *се нарича фотонна повърхнина, ако всяка изотропна геодезична, първоначално тангенциална към* P^3*, остава тангенциална към* P^3*, докато съществува.*

Definiton 2.2. *Нека* $(P^3, p) \hookrightarrow (\mathfrak{L}^4, \mathfrak{g})$ *е фотонна повърхнина. Тогава* P^3 *се нарича фотонна сфера, ако lapse функцията* N *е константна върху* P^3 *и еднoформата* $\iota_\xi F$ *е нормална към* P^3*.*

Ще допуснем, че lapse функцията N регулярно разслоява пространство-времето извън фотонната сфера, т.е.

$$\rho^{-2} = g\left({}^g\nabla N, {}^g\nabla N\right) \neq 0 \tag{4}$$

извън фотонната сфера. Пространствената част от тази външна област ще означим с M^3_{ext} и по дефиниция тя има за вътрешна граница сечението Σ на най-външната фотонна сфера с времевия слой M^3. По дефиниция Σ се дава от $N = N_0$ за някое $N_0 \in \mathbb{R}^+$. Като следствие от нашето допускане всички множества, за които $N = const$, включително Σ, топологично са сфери и M^3_{ext} топологично е $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

Дефинираме еднoформата на електричното поле E като

$$E = -\iota_\xi F, \tag{5}$$

и тя удовлетворява $\mathrm{d}E = 0$. От това следва съществуването на електричен потенциал Φ, такъв че $E = \mathrm{d}\Phi$. Можем да напишем явен израз за F,

$$F = -N^{-2}\xi \wedge \mathrm{d}\Phi. \tag{6}$$

По дефиниция електричното поле E е нормално към фотонната сфера и следователно електричният потенциал Φ е константен върху нея. Ще наложим условието $\Phi_\infty = 0$.

Размерно редуцираните статични уравнения на Айнщайн-Максуел са:

$$
\begin{aligned}
&{}^g\Delta N = N^{-1}\, {}^g\nabla^i \Phi\, {}^g\nabla_i \Phi, && (7)\\
&{}^gR_{ij} = N^{-1}\, {}^g\nabla_i\, {}^g\nabla_j N + N^{-2}\left(g_{ij}\, {}^g\nabla^k \Phi\, {}^g\nabla_k \Phi - 2\, {}^g\nabla_i \Phi\, {}^g\nabla_j \Phi\right), && (8)\\
&{}^g\nabla^i\left(N^{-1}\, {}^g\nabla_i \Phi\right) = 0. && (9)
\end{aligned}
$$

Има функционална зависимост между N и Φ

$$N^2 = \Phi^2 - 2\frac{M}{Q}\Phi + 1, \tag{10}$$

за която може да бъде показано, че важи върху цялото M^3_{ext}.

От принципа за максимума за елиптични частни диференциални уравнения и от асимптотичното поведение на N за $r \to \infty$ получаваме за стойностите на N върху M^3_{ext} следните неравенства:

$$N_0 \leq N < 1. \tag{11}$$

3 Помощни равенства и теореми

Втората фундаментална форма на P^3 може да бъде записана като $\mathfrak{h} = \frac{\mathfrak{H}}{3}p$ [1], където $\mathfrak{H}$ е средната кривина на P^3. Използвайки това, можем да докажем теорема за средната и скаланата кривина на фотонната сфера P^3 в нашето пространство-време.

Theorem 3.1. *Нека $(\mathfrak{L}^4, \mathfrak{g}, F)$ е статично, асимптотически плоско пространство-време на Айнщайн-Максуел, съдържащо фотонна сфера $(P^3, p) \hookrightarrow (\mathfrak{L}^4, \mathfrak{g})$. Тогава P^3 има константна средна кривина (КСрК) и константна скаларна кривина (КСК).*

Гокащаудлтухо. Доказателството на теоремата използва уравненията на Гаус и Кодаци за $(P^3, p) \hookrightarrow (\mathfrak{L}^4, \mathfrak{g})$ с единичен нормален вектор ν. Освен това използваме, че $E_\nu = \iota_E \nu$ е константа върху P^3, което е показано по-долу. Скаларната кривина на P^3 е

$$
{}^{p}R = \frac{2}{3}\mathfrak{H}^2 + 2\frac{E_\nu^2}{N^2}. \tag{12}
$$

□

След това пресмятаме втората фундаментална форма h на $(\Sigma, \sigma) \hookrightarrow (M^3, g)$ в единичен нормален вектор ν. Нека $X, Y, Z \in \Gamma(T\Sigma)$ са произволни тангенциални вектори към Σ. Тогава

$$
h(X, Y) = \frac{\mathfrak{H}}{3}\sigma(X, Y). \tag{13}
$$

Следователно виждаме, че Σ има КСрК $H = \frac{2}{3}\mathfrak{H}$. Сега използваме уравнението на Кодаци за $(\Sigma, \sigma) \hookrightarrow (M^3, g)$ и достигаме до ${}^{g}R(Y, \nu) = 0$, чрез което можем да покажем, че $\nu(N)$ е константа върху Σ (т.е. ${}^{g}\mathcal{L}_X(\nu(N)) = 0$). Като директно следствие от (10) получаваме, че E_ν също е константа върху Σ и следователно – върху P^3.

Чрез няколко прилагания на контрактираното уравнение на Гаус, както и на теоремата на Гаус-Боне, дефиницията на Комар за масата M и уравнението

$$
{}^{g}\Delta N = {}^{\sigma}\Delta N + {}^{g}\nabla^2 N(\nu, \nu) + ({}^{\sigma}\mathrm{tr}h)\nu(N), \tag{14}
$$

за $(\Sigma, \sigma) \hookrightarrow (M^3, g)$ получаваме

$$
1 = \frac{4\pi Q^2}{A_\Sigma} + \frac{2}{3}(M - Q\Phi_0)H \tag{15}
$$

и

$$
2\nu(N) = N_0 H. \tag{16}
$$

4 Теорема за единственост

Definiton 4.1. *Една фотонна сфера се нарича неекстремална, ако*

$$\frac{1}{4\pi}H^2 A_\Sigma \neq 1. \tag{17}$$

В нашия случай фотонната сфера е неекстремална, само ако $M^2 \neq Q^2$.

Theorem 4.1. *Нека $(\mathfrak{L}^4_{ext}, \mathfrak{g}, F)$ е статично и асимптотически плоско пространство-време с дадена маса M и заряд Q, удовлетворяващо уравненията на Айнщайн-Максуел и притежаващо фотонна сфера, която е вътрешна граница на $\mathfrak{L}^4_{ext}$. Допускаме, че lapse функцията регулярно разслоява $\mathfrak{L}^4_{ext}$. Тогава $(\mathfrak{L}^4_{ext}, \mathfrak{g}, F)$ е изометрично на пространство-времето на Райснер-Нордстрьом с маса M и заряд Q, удовлетворяващи неравенството $Q^2/M^2 \leq 9/8$.*

Гокащаудлтухо. Първо разглеждаме 3-метриката γ_{ij} върху M^3_{ext}, дефинирана като

$$\gamma_{ij} = N^2 g_{ij}. \tag{18}$$

След това записваме размерно редуцираните статични уравнения на Айнщайн-Максуел чрез новата метрика γ_{ij}. Допълнителна редукция може да се постигне, като се отчете, че N и Φ са функционално зависими (от (10)) и вместо да се използва N или Φ можем да използваме друг потенциал $\tilde{\lambda}$, дефиниран като

$$\mathrm{d}\tilde{\lambda} = -N^{-2}\mathrm{d}\Phi, \;\; \tilde{\lambda}_\infty = 0. \tag{19}$$

Трябва да бъдат разгледани два случая: $Q^2/M^2 < 1$ и $Q^2/M^2 > 1$, използвайки неравенствата

$$\int\limits_{M^3_{ext}} D^i \left[\Omega^{-1}\left(\Gamma D_i \chi - \chi D_i \Gamma\right)\right] \sqrt{\gamma} \mathrm{d}^3 x \geq 0 \tag{20}$$

и

$$\int\limits_{M^3_{ext}} D^i \left(\Omega^{-1} D_i \chi\right) \sqrt{\gamma} \mathrm{d}^3 x \geq \int\limits_{M^3_{ext}} D^i \left[\Omega^{-1}\left(\Gamma D_i \chi - \chi D_i \Gamma\right)\right] \sqrt{\gamma} \mathrm{d}^3 x, \tag{21}$$

където χ, Γ и Ω са дефинирани по подходящ начин за всеки от случаите. Освен това трябва да използваме различен потенциал $\lambda(\tilde{\lambda})$ за двата случая. Тогава можем да покажем, че тензорът на Бах става нула, $R(\gamma)_{ijk} = 0$, т. е. g_{ij} е конформно плоска. Това постигаме като показваме, че (20) и (21) стават равенства, което е еквивалентно на $R(\gamma)_{ijk} = 0$.

Пресмятайки $R(g)_{ijk}R(g)^{ijk}$, можем да покажем, че геометрията на пространството е сферичносиметрична. Тогава от теоремата на Биркхоф можем да видим, че пространство-времето е изометрично на това на Райснер-Нордстрьом.

Ограничението $Q^2/M^2 \leq 9/8$ се получава от равенствата (20) и (21).

$\square$

5 Коментари

Доказахме, че статичните и асимптотически плоски решения на уравненията на Айнщайн-Максуел с маса M и електричен заряд Q, притежаващи неекстремална фотонна сфера, са изометрични на пространство-времето на Райснер-Нордстрьом със същите маса и заряд, удовлетворяващи условието $Q^2/M^2 \leq 9/8$. Трябва да се отбележи, че теоремата ни не покрива екстремалния случай, който изисква по-сложни техники. Освен това условието, че lapse функцията разслоява пространство-времето регулярно също може да бъде премахнато, но трябва да платим цена за това, а именно – технически по-детайлно доказателство.

Bibliography

[1] S. Yazadjiev, B. Lazov (2015) Uniqueness of the static Einstein-Maxwell spacetimes with a photon sphere. *Classical and Quantum Gravity* **32** 16.